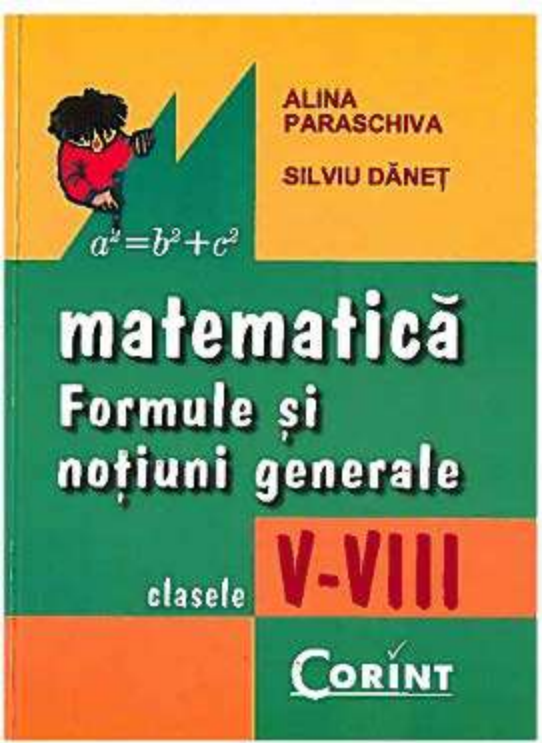



ALINA PARASCHIVA
SILVIU DĂNEȚ

# matematică
## Formule și noțiuni generale

clasele

## V-VIII

Ediția a II-a

CORINT

Redactare: **Alice Raluca Petrescu**
Tehnoredactare: **Andrei Cîrtoaje**
Coperta: **Walter Riess**

920927

*Date despre autori:*

**GABRIELA ALINA PARASCHIVA** — profesor gradul I la Colegiul Național „Gheorghe Lazăr" din București, coautor la auxiliare școlare pentru clasele V-VIII, autor de articole în reviste de specialitate.

**SILVIU DĂNEȚ** — profesor gradul II la Grupul Școlar Agricol „Viaceslav Harnaj" din București, coautor la auxiliare școlare pentru clasele V-VIII, autor de articole în revista „Arhimede".

*Referent:* **LILIANA FLORICA VÎJÎIANU** — profesor la Școala Generală nr. 70, sector 3, București.

**Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României**
**PARASCHIVA, ALINA**
**Matematică: formule și noțiuni generale: clasele V-VIII** / Alina Paraschiva, Silviu Dăneț.- Ed. a 2-a. - București: Corint, 2008
ISBN 978-973-135-428-6
I. Dăneț, Silviu
51(075.33)(083.5)

Difuzare și Clubul cărții :
Calea Plevnei nr. 145, sector 6, cod poștal 060012, București
Tel.: 021.319.88.22; 021.319.88.33; Fax: 021.319.88.66
E-mail: vanzari@edituracorint.ro
Magazin virtual: www.edituracorint.ro

ISBN: 978-973-135-428-6
Format: 32/ 61 × 86; Coli tipo: 4

Toate drepturile asupra acestei ediții sunt rezervate Editurii CORINT, parte componentă a GRUPULUI EDITORAL CORINT.

Tiparul executat la: FED PRINT S.A.

# Prefață

Pregătirea elevilor la matematică, atât la clasă, cât și în vederea susținerii unor examene și concursuri, trebuie să pornească de la cunoașterea, înțelegerea și reținerea noțiunilor teoretice, fără de care orice problemă rămâne o „enigmă nerezolvată".

Lucrarea este organizată în două părți, corespunzătoare celor două ramuri ale studiului matematicii în clasele V-VIII — algebră și geometrie —, și realizează o trecere în revistă a tuturor noțiunilor de matematică incluse în programa școlară din curriculum nucleu și curriculum aprofundat pentru gimnaziu. Noțiunile sunt structurate și incluse în capitole, conform materiei studiate, astfel încât elevul să se poată orienta ușor și, totodată, să aibă la dispoziție tot arsenalul teoretic necesar, însoțit de exemplificări prin câteva exerciții.

Considerăm că prezenta lucrare este un auxiliar didactic util și eficient, atât pentru elevi, cât și pentru profesori, pentru activitatea curentă desfășurată acasă sau în clasă, dar și pentru examene, reușind să acopere, în totalitate, într-o formă sintetică, conținuturile programei de matematică pentru gimnaziu.

*Autorii*

Capitolul I

# Mulțimea numerelor naturale

Simbolurile 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 se numesc **cifre**.

Numerele scrise astfel 0, 1, 2, ..., 9, 10, 11, .... formează **șirul numerelor naturale**.

*Observație.* Șirul numerelor naturale este infinit.

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ – mulțimea numerelor naturale.
$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, ...\} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

*Numerele naturale* sunt:
- **pare** – se împart exact la 2, se notează $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$;
- **impare** – nu se împart exact la 2, se notează $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$.

## 1. Operații cu numere naturale

### 1.1. Adunarea

termen + termen = sumă

***Proprietățile adunării numerelor naturale:***

a) Comutativitatea: $a + b = b + a$, $\forall\, a, b \in \mathbb{N}$.

b) Asociativitatea: $a + (b + c) = (a + b) + c$, $\forall\, a, b, c \in \mathbb{N}$.

c) Elementul neutru: $a + 0 = 0 + a = a$, $\forall\, a \in \mathbb{N}$. (Numărul natural 0 este element neutru față de adunare.)

### 1.2. Scăderea

descăzut – scăzător = diferență

$a - b = c$, $\forall\, a, b \in \mathbb{N}$, $a \geqslant b$.

*Proba scăderii:* $a = b + c$.

## 1.3. Înmulțirea

deînmulțit · înmulțitor = produs

*Notație:* În loc de semnul „ · " care simbolizează înmulțirea se folosește și „×".

***Proprietățile înmulțirii numerelor naturale:***

a) Comutativitatea: $a \cdot b = b \cdot a, \forall\, a, b \in \mathbb{N}$.

b) Asociativitatea: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), \forall\, a, b, c \in \mathbb{N}$.

c) Elementul neutru: $a \cdot 1 = a, \forall\, a \in \mathbb{N}$. (Numărul natural 1 este element neutru față de înmulțire.)

d) $a \cdot 0 = 0, \forall\, a \in \mathbb{N}$.

e) Distributivitatea înmulțirii față de adunare:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \forall\, a, b, c \in \mathbb{N}.$$

f) Distributivitatea înmulțirii față de scădere:

$$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c, \forall\, a, b, c \in \mathbb{N}, b > c.$$

## 1.4. Împărțirea

deîmpărțit : împărțitor = cât

$a : b = c, \forall\, a, b \in \mathbb{N}, b \neq 0$.

*Proba împărțirii:* $a = b \cdot c$.

*Observație:* $\mathbf{0 : b = 0}, \forall\, b \in \mathbb{N}, b \neq 0$.

### Teorema împărțirii cu rest

Oricare ar fi numerele naturale $a$ și $b$, $b \neq 0$, numite **deîmpărțit** și, respectiv, **împărțitor**, există două numere naturale $q$ și $r$, numite **cât** și, respectiv, **rest**, astfel încât

$$a = b \cdot q + r, r < b.$$

Numerele $q$ și $r$, determinate în aceste condiții, sunt *unice*.





## 2. Compararea și ordonarea numerelor naturale

Pentru orice două numere naturale $a$ și $b$ există una și numai una dintre următoarele relații:

$a < b$ — $a$ mai mic decât $b$

sau

$a = b$ — $a$ egal cu $b$

sau

$a > b$ — $a$ mai mare decât $b$

Pentru orice $a, b \in \mathbb{N}$ avem următoarele relații:

- $a \leqslant b$ dacă și numai dacă $a < b$ și $a = b$;
- $a \geqslant b$ dacă și numai dacă $a > b$ și $a = b$.

Egalitatea și inegalitatea numerelor naturale au proprietatea de *tranzitivitate*:

- Dacă $a < b$ și $b < c$, atunci $a < c, \forall\, a, b, c \in \mathbb{N}$.
- Dacă $a \leqslant b$ și $b \leqslant c$, atunci $a \leqslant c, \forall\, a, b, c \in \mathbb{N}$.
- Dacă $a > b$ și $b > c$, atunci $a > c, \forall\, a, b, c \in \mathbb{N}$.
- Dacă $a \geqslant b$ și $b \geqslant c$, atunci $a \geqslant c, \forall\, a, b, c \in \mathbb{N}$.
- Dacă $a = b$ și $b = c$, atunci $a = c, \forall\, a, b, c \in \mathbb{N}$.

Relațiile $<$, $\leqslant$, $>$, $\geqslant$ sunt *relații de ordine* și *ordonează numerele naturale.*

## 3. Factor comun

Pentru orice numere naturale $a$, $b$ și $c$ avem:

$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$ și

$a \cdot b - a \cdot c = a \cdot (b - c)$, cu $b > c$.

## 4. Puterea unui număr natural

***Definiții:***

♦ Se numește **puterea a *n*-a a numărului natural *a*** numărului $a^n$ dat prin $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ ori}}$, $n \geq 2$, $a, n \in \mathbb{N}$,

unde: $a$ – se numește **baza puterii**;

$n$ – se numește **exponentul puterii**.

♦ Operația matematică prin care se obține puterea unui număr se numește **ridicare la putere**.

### 4.1. Reguli de calcul cu puteri

Pentru orice $a \in \mathbb{N}$ și orice $m, n \in \mathbb{N}$ avem:

1. $a^1 = a$, $\forall\, a \in \mathbb{N}^*$;
2. $a^0 = 1$, $\forall\, a \in \mathbb{N}^*$;
3. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, $\forall\, a \in \mathbb{N}^*$;
4. $a^m : a^n = a^{m-n}$, $\forall\, a \in \mathbb{N}^*$, $m \geq n$;
5. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$, $\forall\, a \in \mathbb{N}^*$;
6. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$, $\forall\, a, b \in \mathbb{N}^*$;
7. $(a : b)^n = a^n \cdot b^n$, $\forall\, a, b \in \mathbb{N}^*$;
8. $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$, $\forall\, a \in \mathbb{N}^*$.

*Observație*: $0^0$ nu se poate efectua.

***Definiție:*** Puterea a doua a unui număr natural se mai numește și **pătratul** acelui număr.

### 4.2. Compararea puterilor

♦ Dintre două puteri care au aceeași bază, este mai mare puterea care are exponentul mai mare.

$$a^n > a^m \Leftrightarrow n > m,\ \forall\, a \in \mathbb{N}^*,\ n, m \in \mathbb{N}.$$





♦ Două puteri care au aceeași bază sunt egale dacă au exponenți egali.

$$a^n = a^m \Leftrightarrow n = m,\ \forall\, a \in \mathbb{N}^*,\ n, m \in \mathbb{N}.$$

♦ Dintre două puteri cu baze diferite, dar având același exponent (diferit de zero), este mai mare puterea care are baza mai mare.

$$a^n < b^n \Leftrightarrow a < b,\ \forall\, a, b \in \mathbb{N}^*,\ n \in \mathbb{N}^*.$$

## 5. Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor

Dacă într-o expresie există paranteze rotunde, drepte și acolade, începem cu efectuarea calculelor din parantezele rotunde. După efectuarea acestor calcule, parantezele drepte le transformăm în paranteze rotunde, iar acoladele în paranteze drepte și continuăm efectuarea calculelor din noile paranteze rotunde.

În funcție de ordinea în care se execută, celor cinci operații matematice cunoscute pentru numerele naturale – adunarea, scăderea, înmulțirea, împărțirea și ridicarea la putere – li s-a alocat un **ordin**.

| Operații | Ordin |
|---|---|
| Adunarea și scăderea | I |
| Înmulțirea și împărțirea | II |
| Ridicarea la putere | III |

Dacă un exercițiu conține operații de ordine diferite, se efectuează mai întâi operațiile de ordinul III, apoi cele de ordinul II și, în final, cele de ordinul I.

## 6. Descompunerea numerelor naturale (în baza 10)

$\overline{ab} = a \cdot 10^1 + b \cdot 10^0$

$\overline{abc} = a \cdot 10^2 + b \cdot 10^1 + c \cdot 10^0$

$\overline{abcd} = a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10^1 + d \cdot 10^0$

unde $a, b, c, d$ sunt cifre, $a \neq 0$.

*Observaţie:* Orice număr natural se poate descompune după modelul de mai sus.

## 7. Divizibilitatea

### 7.1. Noţiuni generale

***Definiţie:*** Un număr natural $a$ este **divizibil** cu $b$, dacă există un număr natural $c$ astfel încât $a = b \cdot c$. Numărul $a$ se numeşte **multiplu** de $b$, iar $b$ se numeşte **divizor** al lui $a$.

| *Notaţie:* | *Se citeşte:* |
|---|---|
| $a \vdots b$ | $a$ se divide cu $b$ |
| sau | |
| $b \mid a$ | $b$ îl divide pe $a$ |

***Proprietăţile divizibilităţii:***

**1.** Reflexivitatea: $a \vdots a, \forall a \in \mathbb{N}$.

**2.** Antisimetria: dacă $a \vdots b$ şi $b \vdots a$, atunci $a = b, \forall a, b \in \mathbb{N}$.

**3.** Tranzitivitatea: dacă $a \vdots b$ şi $b \vdots c$, atunci $a \vdots c, \forall a, b, c \in \mathbb{N}$.

**4.** $a \vdots 1, \forall a \in \mathbb{N}$.

**5.** $0 \vdots a, \forall a \in \mathbb{N}$.

**6.** Dacă $a \vdots b$ şi $c \vdots b$, atunci $(a \pm c) \vdots b, \forall a, b, c \in \mathbb{N}$.

**7.** Dacă $a \vdots b$, atunci $(a \cdot c) \vdots b, \forall a, b, c \in \mathbb{N}$.

**8.** Dacă $a \vdots b$ şi $a \vdots c$, atunci $a \vdots (b \cdot c), \forall a, b, c \in \mathbb{N}$.





### 7.2. Criterii de divizibilitate

✧ Un număr natural este divizibil cu 2, dacă şi numai dacă ultima cifră a numărului este o cifră pară: 0, 2, 4, 6 şi 8.

✧ Un număr natural este divizibil cu 5, dacă şi numai dacă ultima cifră a numărului este 0 sau 5.

✧ Un număr natural este divizibil cu 10, dacă şi numai dacă ultima cifră este 0.

✧ Un număr natural este divizibil cu 3 (sau 9), dacă şi numai dacă suma cifrelor numărului este multiplu de 3 (sau 9).

### 7.3. Numere prime şi numere compuse

***Definiţii:***

♦ Spunem că un număr este **prim** dacă are ca divizori pe 1 şi pe el însuşi.

♦ Un număr care are mai mult de doi divizori se numeşte **număr compus**.

#### Cel mai mare divizor comun (c.m.m.d.c.)

***Definiţie:*** Spunem că $d$ este **cel mai mare divizor comun** a două numere naturale $a$ şi $b$ dacă:

a) $d \mid a$;

b) $d \mid b$;

c) orice alt divizor comun $d'$ al acelor numere este divizor şi pentru $d$.

*Notaţie:* $d = \text{c.m.m.d.c.}(a, b) \overset{not}{=} (a, b)$.

*Observaţie:* C.m.m.d.c. se află astfel:

**I.** Se descompun numerele $a$ şi $b$ în produs de factori primi.

**II.** Se înmulţesc factorii primi comuni, scrişi o singură dată, la puterile cele mai mici.

*Exemplu:* Calculăm (300, 225).

**I.**

| 300 | $2^2 \cdot 5^2$ |
|---|---|
| 3 | 3 |
| 1 | |

$300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$

| 225 | $5^2$ |
|---|---|
| 9 | $3^2$ |
| 1 | |

$225 = 3^2 \cdot 5^2$

**II.** $(300, 225) = 5^2 \cdot 3 = 75$.

***Definiţie:*** Două numere se numesc prime între ele dacă cel mai mare divizor comun al lor este 1.

## Cel mai mic multiplu comun (c.m.m.m.c.)

***Definiţie:*** Spunem că $m$ este **cel mai mic multiplu comun** a două numere naturale $a$ şi $b$ dacă:

a) $a \mid m$;

b) $b \mid m$;

c) orice alt multiplu comun nenul $m'$ al acelor numere este multiplu al lui $m$.

*Notaţie:* $m = \text{c.m.m.m.c.}(a,b) \overset{not}{=} [a,b]$.

*Observaţie:* C.m.m.m.c se află astfel:

**I.** Se descompun numerele $a$ şi $b$ în produs de factori primi.

**II.** Se înmulţesc factorii primi comuni şi necomuni, scrişi o singură dată, la puterile cele mai mari.

*Exemplu:* Calculăm [320, 165].

**I.**

| 320 | $2 \cdot 5$ |
|---|---|
| 32 | $2^5$ |
| 1 | |

$320 = 2^6 \cdot 5$

| 165 | 11 |
|---|---|
| 15 | $3 \cdot 5$ |
| 1 | |

$165 = 3 \cdot 5 \cdot 11$

**II.** $[320, 165] = 2^6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 = 10\,560$.



Capitolul II

# Propoziţii şi mulţimi

## 1. Propoziţii

***Definiţie:*** O **propoziţie** este un enunţ care este ori fals ori adevărat.

### 1.1. Valoarea de adevăr a unei propoziţii

Dacă o propoziţie este adevărată spunem că ea are valoarea de adevăr „adevărul" şi o notăm cu A; dacă o propoziţie este falsă spunem că are valoare de adevăr „falsul" şi o notăm cu F.

### 1.2. Propoziţii compuse

Dacă $p$ şi $q$ sunt două propoziţii, atunci putem obţine următoarele propoziţii compuse:

$p$ şi $q$, $p$ sau $q$, $\neg p$.

**1. $p$ şi $q$**

Propoziţia ***p* şi *q*** este adevărată când propoziţiile $p$ şi $q$ sunt adevărate.

| $p$ | $q$ | $p$ şi $q$ |
|---|---|---|
| A | A | A |
| A | F | F |
| F | A | F |
| F | F | F |

**2. $p$ sau $q$**

Propoziţia ***p* sau *q*** este adevărată dacă cel puţin una dintre propoziţiile $p$ sau $q$ este adevărată.

| $p$ | $q$ | $p$ sau $q$ |
|---|---|---|
| A | A | A |
| A | F | A |
| F | A | A |
| F | F | F |

**3. $\neg p$** (se citeşte non $p$)

Propoziţia $\neg p$ este falsă atunci când $p$ este adevărată şi adevărată atunci când $p$ este falsă.

| $p$ | $\neg p$ |
|---|---|
| A | F |
| F | A |

# 2. Mulţimi

## 2.1. Noţiuni generale

O mulţime este **bine precizată** când se cunosc obiectele din care este constituită.

Dacă $A$ este o mulţime, pentru orice obiect $x$ avem numai una dintre situaţiile $x \in A$ sau $x \notin A$, unde $\in$ înseamnă **aparţine**, iar $\notin$ înseamnă **nu aparţine**.

*Observaţie:* Mulţimea fără nici un element se numeşte **mulţimea vidă** şi se notează cu $\varnothing$.

*Exemple de mulţimi:*

$A = \{a, b, c, d \mid a, b, c, d \in \mathbb{N}\}$;

$B = \{1, a, a^2, a^3 \mid a \in \mathbb{N}\}$;

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$;

$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, ...\} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

## 2.2. Cardinalul unei mulţimi

***Definiţii:***

♦ Dacă numărul de elemente al unei mulţimi se poate exprima printr-un număr natural, spunem că mulţimea este **finită**. Dacă nu, atunci spunem că mulţimea este **infinită**.

♦ Numărul natural care exprimă numărul de elemente al unei mulţimi finite se numeşte **cardinalul mulţimii**.

*Notaţie:* Cardinalul mulţimii $A$ se notează card$A$ sau $|A|$.

*Observaţie:* $|\varnothing| = 0$.





## 2.3. Relaţii între mulţimii

Fie $A$ şi $B$ două mulţimi.

**1. *Egalitatea***

$A = B$ dacă cele două mulţimi au aceleaşi elemente.

*Se citeşte:* $A$ egal cu $B$.

**2. *Incluziunea***

$A \subset B$ dacă orice element din $A$ se găseşte şi în $B$.

*Se citeşte:* $A$ inclus în $B$.

**3. *Reuniunea***

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$.

*Se citeşte:* $A$ reunit cu $B$.

**4. *Intersecţia***

$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ şi } x \in B\}$.

*Se citeşte:* $A$ intersectat cu $B$.

**5. *Diferenţa***

$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ şi } x \notin B\}$.

*Se citeşte:* $A$ fără $B$.

**6. *Produsul cartezian***

$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ şi } y \in B\}$.

Capitolul III

# Mulțimea numerelor întregi

## 1. Noțiuni generale

♦ Mulțimea numerelor întregi este

$\mathbf{Z} = \{..., -n, ..., -2, -1, 0, 1, 2, 3, ..., n, ...\}$

♦ $\mathbf{Z}^* = \mathbf{Z} \setminus \{0\}$

Avem incluziunea: $\mathbb{N} \subset \mathbf{Z}$.

### 1.1. Opusul unui număr întreg

***Definiție:*** **Opusul** unui număr întreg $a$ se notează $-a$.

*Observație:* Dacă $a > 0$, atunci $-a < 0$.
Dacă $a < 0$, atunci $-a > 0$.

### 1.2. Modulul unui număr întreg

***Definiție:*** **Modulul** sau **valoarea absolută** a unui număr întreg $a$ este $|a| = \begin{cases} a, & \text{dacă } a > 0 \\ 0, & \text{dacă } a = 0 \\ -a, & \text{dacă } a < 0 \end{cases}$.

***Proprietățile modulului:***

1. $|a| \geqslant 0, \forall a \in \mathbf{Z}$.
2. $|a| = |-a|, \forall a \in \mathbf{Z}$.
3. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|, \forall a, b \in \mathbf{Z}$.
4. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, \forall a, b \in \mathbf{Z}$, cu $b \neq 0$.
5. $|a| - |b| \leqslant |a + b| \leqslant |a| + |b|, \forall a, b \in \mathbf{Z}$.





6. $|x| = a \Leftrightarrow x = \pm a, \forall a \in \mathbf{Z}^*$.
7. $|x| \leqslant a \Leftrightarrow -a \leqslant x \leqslant a, \forall a \in \mathbf{Z}^*$.
8. $|x| \geqslant a \Leftrightarrow x \leqslant -a$ sau $x \geqslant a, \forall a \in \mathbf{Z}^*$.

## 2. Operații cu numere întregi

### 2.1. Adunarea

Pentru a aduna două numere întregi procedăm astfel:

**I.** Dacă numerele au același semn, scriem la rezultat semnul celor două numere și adunăm valorile lor absolute.

**II.** Dacă numerele sunt de semne contrare, scriem la rezultat semnul numărului care are valoarea absolută mai mare și scădem valoarea absolută mică din valoarea absolută mare.

***Proprietățile adunării numerelor întregi:***

a) Asociativitatea: $a + (b + c) = (a + b) + c, \forall a, b, c \in \mathbf{Z}$.

b) Comutativitatea: $a + b = b + a, \forall a, b \in \mathbf{Z}$.

c) Elementul neutru: $a + 0 = 0 + a = a, \forall a \in \mathbf{Z}$. (Numărul întreg 0 este element neutru pentru adunare.)

### 2.2. Scăderea

Rezultatul scăderii a două numere întregi este rezultatul adunării descăzutului cu opusul scăzătorului.

$$a - b = a + (-b), \forall a, b \in \mathbf{Z}.$$

### 2.3. Înmulțirea

Pentru a înmulți două numere întregi procedăm astfel:

**I.** Dacă numerele au același semn, scriem la rezultat semnul + și înmulțim valorile lor absolute.

**II.** Dacă numerele nu au același semn, scriem la rezultat semnul − și înmulțim valorile lor absolute.

***Regula semnelor la înmulțire:***

$(+)\cdot(+)=(+)$ $\quad (+)\cdot(-)=(-)$

$(-)\cdot(-)=(+)$ $\quad (-)\cdot(+)=(-)$

***Proprietățile înmulțirii numerelor întregi:***

a) Asociativitatea: $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c),\ \forall\, a,b,c\in\mathbf{Z}$.

b) Comutativitatea: $a\cdot b=b\cdot a,\ \forall\, a,b\in\mathbf{Z}$.

c) Elementul neutru: $a\cdot 1=1\cdot a=a,\ \forall\, a\in\mathbf{Z}$. (Numărul întreg 1 este element neutru pentru înmulțire.)

d) $a\cdot(-1)=(-1)\cdot a=-a,\ \forall\, a\in\mathbf{Z}$.

e) $(-a)\cdot(-1)=(-1)\cdot(-a)=a,\ \forall\, a\in\mathbf{Z}$.

f) Distributivitatea înmulțirii față de adunare:

$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c,\ \forall\, a,b,c\in\mathbf{Z}$.

g) Distributivitatea înmulțirii față de scădere:

$a\cdot(b-c)=a\cdot b-a\cdot c,\ \forall\, a,b,c\in\mathbf{Z}$.

## 2.4. Împărțirea

Împărțirea numerelor întregi este asemănătoare cu cea a numerelor naturale și are aceleași proprietăți.



Capitolul IV

# Mulțimea numerelor raționale

## 1. Noțiuni generale. Fracții

***Definiție:*** Un raport de numere întregi $\frac{a}{b}$, $a,b\in\mathbf{Z}$, $b\neq 0$, astfel încât $a$ nu se împarte exact la $b$ este **număr rațional**.

$\mathbf{Q}=\left\{\frac{a}{b}\mid a,b\in\mathbf{Z},\ b\neq 0\right\}$ – mulțimea numerelor raționale.

$\mathbf{Q}^*=\mathbf{Q}\setminus\{0\}$.

Avem incluziunile: $\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}$.

***Definiție:*** O expresie de forma $\frac{a}{b}$, cu $a,b\in\mathbf{N}$ și $b\neq 0$, se numește **fracție**. Numărul $a$ se numește **numărător**, numărul $b$ se numește **numitor**, iar raportul $\frac{a}{b}$ este **câtul neefectuat** al împărțirii $a:b$.

*Observații:*

**1.** Dacă $\frac{a}{b}>1$, atunci fracția se numește **supraunitară** și are loc relația $a>b$.

**2.** Dacă $\frac{a}{b}<1$, atunci fracția se numește **subunitară** și are loc relația $a<b$.

**3.** Dacă $\frac{a}{b}=1$, atunci fracția se numește **echiunitară** și are loc relația $a=b$.

***Definiție:*** Două fracții $\frac{a}{b}$ și $\frac{c}{d}$ cu $a,b,c,d\in\mathbf{N}$, sunt **echivalente** sau **egale** dacă și numai dacă $a\cdot d=b\cdot c$.

*Se scrie:* $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow a\cdot d=b\cdot c$.

BIBLIOTECA JUDEȚEANĂ GH. ȘINCAI

## 2. Amplificarea şi simplificarea fracţiilor

***Definiţii:***

♦ **A amplifica** o fracţie înseamnă a înmulţi şi numărătorul şi numitorul acesteia cu un număr diferit de 0.

*Exemplu:* $\frac{5}{3}\overset{4)}{=}\frac{20}{12}$.

♦ **A simplifica** o fracţie înseamnă a împărţi şi numărătorul şi numitorul acesteia cu un divizor comun al lor.

*Exemplu:* $\frac{36}{48}\overset{(12}{=}\frac{3}{4}$.

♦ **Fracţia ireductibilă** este o fracţie care are numărătorul şi numitorul numere prime între ele.

## 3. Aducerea fracţiilor la acelaşi numitor

Pentru a aduce două sau mai multe fracţii la **acelaşi numitor**, adică la **cel mai mic numitor comun**, procedăm astfel:

**1.** Aflăm **cel mai mic numitor comun**, care este, de fapt, c.m.m.m.c al numitorilor.

**2.** Împărţim numitorul comun la numitorul fiecărei fracţii şi amplificăm fracţia respectivă cu câtul obţinut.

*Exemplu:* Aducem la acelaşi numitor fracţiile $\frac{3}{25}$, $\frac{7}{18}$ şi $\frac{1}{75}$.

$[25, 18, 75] = 5^2 \cdot 3^2 \cdot 2 = 450$

$\overset{18)}{\frac{3}{25}}$, $\overset{25)}{\frac{7}{18}}$, $\overset{6)}{\frac{1}{75}}$ şi obţinem $\frac{54}{450}$, $\frac{175}{450}$ şi $\frac{6}{450}$.





## 4. Opusul unei fracţii

***Definiţie:*** Fie $a, b \in \mathbf{Z}, b \neq 0$. Elementul opus fracţiei $\frac{a}{b}$ este fracţia $-\frac{a}{b}$ care verifică $\frac{a}{b}+\left(-\frac{a}{b}\right)=\left(-\frac{a}{b}\right)+\frac{a}{b}=0$.

Avem $-\frac{a}{b}=\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}$, $\forall\, a, b \in \mathbf{Z}, b \neq 0$.

## 5. Operaţii cu fracţii

### 5.1. Adunarea fracţiilor

Pentru a aduna două fracţii procedăm astfel:

**1.** Dacă fracţiile au acelaşi numitor, atunci: $\frac{a}{m}+\frac{b}{m}=\frac{a+b}{m}$, $\forall\, \frac{a}{m}, \frac{b}{m} \in \mathbb{Q}$.

**2.** Dacă fracţiile n au acelaşi numitor, atunci, mai întâi se aduc la acelaşi numitor fracţiile respective şi apoi se face adunarea lor.

***Proprietăţile adunării fracţiilor:***

a) Comutativitatea: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}$, $\forall \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$.

b) Asociativitatea: $\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{e}{f}=\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)$, $\forall \frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in \mathbb{Q}$.

c) Elementul neutru: $0+\frac{a}{b}=\frac{a}{b}+0=\frac{a}{b}$, $\forall \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$.

(Numărul raţional 0 este element neutru pentru adunare.)

### 5.2. Scăderea fracţiilor

Pentru a scădea două fracţii, adunăm fracţia descăzut cu opusul fracţiei scăzător.

$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a}{b}+\left(-\frac{c}{d}\right)$, $\forall \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$.

## 5.3. Înmulțirea fracțiilor

Pentru a înmulți două sau mai multe fracții, înmulțim numărătorii între ei și numitorii între ei. Scriem:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d},\ \forall\frac{a}{b},\frac{c}{d}\in\mathbb{Q}.$$

***Proprietățile înmulțirii fracțiilor:***

a) Comutativitatea: $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{c}{d}\cdot\frac{a}{b},\ \forall\frac{a}{b},\frac{c}{d}\in\mathbb{Q}$.

b) Asociativitatea: $\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)\cdot\frac{e}{f}=\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}\right)\forall\frac{a}{b},\frac{c}{d},\frac{e}{f}\in\mathbb{Q}$.

c) Elementul neutru: $1\cdot\frac{a}{b}=\frac{a}{b}\cdot1=\frac{a}{b},\ \forall\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}$. (Numărul rațional 1 este element neutru pentru înmulțire.)

d) Distributivitatea înmulțirii față de adunarea fracțiilor:

$$\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}+\frac{a}{b}\cdot\frac{e}{f},\ \forall\frac{a}{b},\frac{c}{d},\frac{e}{f}\in\mathbb{Q}.$$

e) Distributivitatea înmulțirii față de scăderea fracțiilor:

$$\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}-\frac{e}{f}\right)=\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}-\frac{a}{b}\cdot\frac{e}{f},\ \forall\frac{a}{b},\frac{c}{d},\frac{e}{f}\in\mathbb{Q}.$$

## 5.4. Inversul unui număr rațional nenul

***Definiții:***

♦ Fie $a\neq0$ un număr întreg. Spunem că $b$ este **inversul** său dacă și numai dacă $a\cdot b=1$. Inversul se va nota $\frac{1}{a}$.

*Proba:* $a\cdot\frac{1}{a}=\frac{a\cdot1}{a}=\frac{a}{a}=1$.

♦ **Inversa unei fracții** $\frac{a}{b}$, cu $a,b\in\mathbf{Z}^*$, este fracția $\frac{b}{a}$.

*Proba:* $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=\frac{a\cdot b}{b\cdot a}=\frac{ab}{ba}=1$.





## 5.5. Împărțirea fracțiilor

Pentru a împărți două fracții, înmulțim prima fracție cu inversa celei de-a doua.

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c},\ \forall\frac{a}{b},\frac{c}{d}\in\mathbb{Q},\ b,c,d\neq0.$$

## 5.6. Puterea unei fracții

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n},\ \forall\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}.$$

# 6. Fracții ordinare și fracții zecimale

Orice număr rațional poate fi scris sub formă de:

- **fracție ordinară** (ca raport de două numere întregi);
- **fracție zecimală** (finită sau infinită periodică).

## 6.1. Transformarea fracțiilor ordinare în fracții zecimale

Pentru a realiza această transformare se aplică algoritmul de împărțire a numerelor naturale și se obțin diferite tipuri de fracții zecimale:

♦ **fracții zecimale finite** – după virgulă se află un număr finit de zecimale;

*Exemplu:* $\frac{2}{5}=0{,}1$; $\frac{17}{8}=2{,}125$.

♦ **fracții zecimale infinite periodice** – după virgulă se află un număr infinit de zecimale:

- **fracții zecimale periodice simple** – perioada urmează imediat după virgulă;

*Exemplu:* $\frac{4}{3}=1{,}333\ldots=1{,}(3)$.

• **fracții zecimale periodice mixte** – după virgulă urmează un număr finit de zecimale care nu se repetă la infinit (partea neperiodică) și apoi urmează perioada.

*Exemplu:* $\frac{5}{12} = 0,41666... = 0,41(6)$.

## 6.2. Transformarea fracțiilor zecimale în fracții ordinare

**I.** Dacă $a_0 \in \mathbb{N}$ și $a_i$, cu $i = \overline{1,k}$, sunt cifre, atunci

$$a_0, a_1a_2...a_k = a_0 \frac{\overline{a_1a_2...a_k}}{\underbrace{100...0}_{k \text{ ori}}}.$$

*Exemplu:* $2,267 = 2\frac{267}{1000} = \frac{2267}{1000}$.

**II.** Dacă $a_0 \in \mathbb{N}$ și $a_i$, cu $i = \overline{1,k}$, sunt cifre, atunci:

$$a_0, (a_1a_2...a_k) = a_0 \frac{\overline{a_1a_2...a_k}}{\underbrace{99...9}_{k \text{ ori}}}.$$

*Exemplu:* $7,(123) = 7\frac{123}{999}$.

**III.** Dacă $a_0 \in \mathbb{N}$ și $a_i$, cu $i = \overline{1,k+p}$, $p \in \mathbb{N}^*$, sunt cifre, atunci: $a_0, a_1...a_k(a_{k+1}...a_{k+p}) = a_0 \frac{\overline{a_1...a_{k+p}} - \overline{a_1...a_k}}{\underbrace{99...9}_{p \text{ ori}}\underbrace{00...0}_{k \text{ ori}}}$.

*Exemplu:* $4,12(13) = 4\frac{1213-12}{9900} = 4\frac{1201}{9900}$.



Capitolul V

# Mulțimea numerelor reale

## 1. Noțiuni generale

Pe lângă numerele raționale există și numere care nu se pot scrie sub formă de raport (fracții ordinare) cu numărătorul și numitorul numere întregi. Asemenea numere se numesc **iraționale**.

Numerele iraționale sunt:

• numere care conțin radicali;

• fracții zecimale infinite neperiodice.

*Exemple:* $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; $\sqrt{2}-\sqrt{3}$; 3,14159...; 1,010010001... .

Totalitatea numerelor iraționale și raționale formează mulțimea numerelor reale, simbolizată $\mathbb{R}$.

$\mathbb{R} = \{a_0,a_1a_2... \mid a_0 \in \mathbb{Z}, a_i \text{ cifre, cu } i \in \mathbb{N}^*\}$ – *mulțimea numerelor reale.*

$\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ – *mulțimea numerelor raționale.*

Avem incluziunile: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

De asemenea, $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$.

## 2. Radicali

***Definiție:*** Fie $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Se numește **radicalul lui** $a$ numărul real pozitiv $b$ care verifică relația $a^2 = b$.

$\sqrt{a} = b$, $b > 0 \Leftrightarrow a = b^2$, $\forall\, a \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

***Proprietățile radicalilor:***

1. $\sqrt{a^2} = |a|$, $\forall\, a \in \mathbb{R}$.
2. $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, $\forall\, a, b \geq 0$.

3. $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, $\forall\, a \geqslant 0, b > 0$.

4. $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}$, $\forall\, a, b \geqslant 0$.

5. $\frac{c}{a \pm \sqrt{b}} = \frac{c(a \mp \sqrt{b})}{a^2 - b}$, $\forall\, a, b \in \mathbb{R}, b \neq a^2, b > 0$.

6. $\frac{c}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} = \frac{c(\sqrt{a} \mp \sqrt{b})}{a - b}$, $\forall\, a, b > 0,\ a \neq b$.

7. $\frac{b}{\sqrt{a}} = \frac{b\sqrt{a}}{a}$, $\forall\, a, b > 0$.

## 3. Intervale de numere reale

***Definiție:*** **Intervalele** sunt submulțimi de numere reale, care pot fi reprezentate pe axa numerelor ca segmente de dreaptă sau semidrepte.

### 3.1. Tipuri de intervale

**1. Intervale mărginite**, care se reprezintă pe axă sub forma unor *segmente de dreaptă*, cu capete sau fără, în funcție de felul intervalului.

Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Avem:

- *interval deschis la ambele capete*
$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$
- *interval închis la ambele capete*
$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$$
- *interval deschis la stânga și închis la dreapta*
$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$$
- *interval închis la stânga și deschis la dreapta*
$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$$





**2. Intervale nemărginite** sau **semimărginite**, care se reprezintă pe axă sub forma unor *semidrepte*.

Fie $a \in \mathbb{R}$. Avem:

- *interval deschis la stânga și nemărginit la dreapta*
$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$$
- *interval închis la stânga și nemărginit la dreapta*
$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant a\}$$
- *interval deschis la dreapta și nemărginit la stânga*
$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$$
- *interval închis la dreapta și nemărginit la stânga*
$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant a\}$$

### 3.2. Operații cu intervale

Intervalele sunt mulțimi de numere, de aceea cu intervale se pot efectua aceleași operații ca și cu mulțimi: reuniune, intersecție, diferență și produs cartezian. Mai mult, două intervale se pot compara, în urma comparării putând fi: egale unul cu altul, incluse unul în altul sau disjuncte.

## 4. Rapoarte, procente și proporții

### 4.1. Rapoarte

***Definiție:*** **Raportul** a două numere reale $a$ și $b$, cu $b \neq 0$, este câtul împărțirii $a : b$ și se notează $\frac{a}{b}$. Numerele $a$ și $b$ se numesc **termenii raportului**.

### 4.2. Probabilități

***Definiție:*** Se numește **probabilitatea realizării unui eveniment** $A$ raportul dintre numărul cazurilor favorabile realizării evenimentului și numărul cazurilor posibile ale experienței.

*Se scrie:* $P = \dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}$.

## 4.3. Procente

***Definiție:*** Un raport de forma $\frac{p}{100}$ se numește **raport procentual** sau **procent**. Vom nota $\frac{p}{100}$ cu $p\%$.

*Observație:* $p\%$ dintr-un număr real pozitiv $a$ se obține calculând $\frac{p}{100}\cdot a$.

## 4.4. Proporții

***Definiție:*** Egalitatea a două rapoarte se numește **proporție**.

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, cu $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, $b, d \neq 0$.

Numerele $a, b, c$ și $d$ sunt **termenii proporției**, $a$ și $d$ se numesc **extremi**, iar $b$ și $c$ se numesc **mezi**.

*Observație:* $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow a\cdot d = b\cdot c$, $\forall a, b, c, d \in \mathbf{R}, b, d \neq 0$.

### Aflarea unui termen necunoscut al unei proporții

Fie $a, b, c \in \mathbf{R}^*$ numere reale cunoscute și $x \in \mathbf{R}$ un număr real necunoscut, pe care vrem să-l determinăm din proporția $\frac{x}{a}=\frac{b}{c}$ sau $\frac{a}{x}=\frac{b}{c}$. Avem: $\frac{x}{a}=\frac{b}{c} \Rightarrow x=\frac{a\cdot b}{c}$ și $\frac{a}{x}=\frac{b}{c} \Rightarrow x=\frac{a\cdot c}{b}$, cu $a, b, c \in \mathbf{R}^*$ cunoscuți.

### Proporții derivate

Fie $a, b, c, d \in \mathbf{R}^*$ care determină proporția $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.





Pornind de la aceasta, putem să obținem o serie de proporții echivalente, numite **proporții derivate**:

1. schimbând mezii între ei: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{c}=\frac{b}{d}$;
2. schimbând extremii între ei: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{d}{b}=\frac{c}{a}$;
3. inversând ambele rapoarte: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{b}{a}=\frac{d}{c}$;
4. schimbând ordinea rapoartelor: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{c}{d}=\frac{a}{b}$;
5. adunând sau scăzând la numărători numitorii:
$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d};$$
6. adunând sau scăzând la numitori numărătorii:
$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b\pm a}=\frac{c}{d\pm c};$$
7. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b}=\frac{a\pm c}{b\pm d}$.
8. amplificând sau simplificând unul dintre rapoarte;
9. înmulțind sau împărțind ambii numărători (sau ambii numitori) cu un număr real nenul.

### Șir de rapoarte egale

Fie numerele reale $x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_n$, cu $y_i \neq 0$, $\forall i = \overline{1, n}$.

$\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}=.....\frac{x_n}{y_n}$ este un șir de rapoarte egale.

*Observație:* Un șir de rapoarte egale este egal cu raportul dintre suma de numărători și suma de numitori corespunzători.

$$\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}=.....\frac{x_n}{y_n}=\frac{x_1+...+x_n}{y_1+...+y_n}.$$

## 5. Medii

### 5.1. Media aritmetică

***Definiție:*** Fie $x_1, x_2, ..., x_n$, $n \in \mathbb{N}^*$, $n$ numere reale. Numărul real

$$m_a = \frac{x_1 + ... + x_n}{n}$$

se numește **media aritmetică** a numerelor $x_1, x_2, ..., x_n$.

### 5.2. Media geometrică (proporțională)

***Definiție:*** Fie $x_1$ și $x_2$ două numere reale pozitive. Numărul real pozitiv

$$m_g = \sqrt{x_1 \cdot x_2}$$

se numește **media geometrică** sau **media proporțională** a numerelor $x_1$ și $x_2$.

### 5.3. Media aritmetică ponderată

***Definiție:*** Fie $a_1, ..., a_n$, $n \in \mathbb{N}^*$, $n$ numere reale cu ponderile $p_1, p_2, ..., p_n$. Numărul real

$$m_{ap} = \frac{a_1 p_1 + ... + a_n p_n}{p_1 + ... + p_n}$$

se numește **media aritmetică ponderată** a numerelor $a_1, ..., a_n$ cu ponderile $p_1, ..., p_n$.

### 5.4. Media armonică

***Definiție:*** Fie $x_1$ și $x_2$ două numere reale nenule. Numărul real

$$m_h = \frac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}} = \frac{2x_1 \cdot x_2}{x_1 + x_2}$$

se numește **media armonică** a numerelor $x_1$ și $x_2$.





### 5.5. Inegalitatea mediilor

Pentru $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ cu $x_1, x_2 > 0$ avem:

$$\frac{2x_1x_2}{x_1 + x_2} \leqslant \sqrt{x_1x_2} \leqslant \frac{x_1 + x_2}{2},$$

adică $m_h \leqslant m_g \leqslant m_a$.

## 6. Mărimi proporționale

### 6.1. Mărimi direct proporționale

***Definiții:***

♦ Două mărimi $b$ și $a$ sunt **direct proporționale (d.p.)** atunci când depind una de alta, astfel încât dacă una se mărește, respectiv, se micșorează de un număr $n$ de ori și cealaltă se mărește, respectiv, se micșorează de același număr $n$ de ori.

*Se scrie:* $b = n \cdot a$, $n \in \mathbb{R}$, $n > 0$.

♦ Numerele reale $a_1, ..., a_n$ ($n \geqslant 2$) sunt **direct proporționale (d.p.)** respectiv cu numerele reale $b_1, ..., b_n$ dacă există $k \neq 0$ real astfel încât $a_1 = k \cdot b_1, a_2 = k \cdot b_2, ..., a_n = k \cdot b_n$.

*Se scrie:* $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n} = k$, $k \in \mathbb{R}^*$ **factor de proporționalitate.**

**Regula de trei simplă**

*Exemplu:* Din 3 kg de făină se obțin 4 pâini. Aflați câte pâini se obțin din 15 kg de făină.

*Rezolvare:*

3 kg făină ..... 4 pâini

15 kg făină ..... $x$ pâini

$$\frac{3}{15} = \frac{4}{x} \Rightarrow x = \frac{4 \cdot 15}{3} \Rightarrow x = 20 \text{ pâini.}$$

## 6.2. Mărimi invers proporţionale

***Definiţii:***

♦ Două mărimi $b$ şi $a$, $a \neq 0$, sunt **invers proporţionale (i.p.)** atunci când depind una de alta, astfel încât dacă una se măreşte, respectiv, se micşorează de un număr $n$ de ori, atunci cealaltă se micşorează, respectiv, se măreşte de acelaşi număr $n$ de ori.

*Se scrie:* $b = n \cdot \frac{1}{a}$, $n \in \mathbf{R}$, $n > 0$.

♦ Numerele reale $a_1, a_2, ..., a_n$ $(n \geq 2)$ sunt **invers proporţionale (i.p.)** respectiv cu numerele reale $b_1, b_2, ..., b_n$ dacă există $k \neq 0$ real astfel încât $b_1 = k \cdot \frac{1}{a_1}$, $b_2 = k \cdot \frac{1}{a_2}$, ..., $b_n = k \cdot \frac{1}{a_1}$.

*Se scrie:* $\frac{a_1}{\frac{1}{b_1}} = \frac{a_2}{\frac{1}{b_2}} = ... = \frac{a_n}{\frac{1}{b_n}} = k$ sau

$a_1 \cdot b_1 = a_2 \cdot b_2 = ... = a_n \cdot b_n = k$,

$k \in \mathbf{R}^*$ factor de proporţionalitate.

### Regula de trei simplă

*Exemplu:* Dacă 3 robinete umplu un bazin în 12 ore, atunci aflaţi în câte ore umplu acelaşi bazin 4 robinete.

*Rezolvare:*

3 robinete ..... 12 ore

4 robinete ..... $x$ ore

Deoarece timpul de umplere a bazinului este o mărime invers proporţională cu numărul de robinete obţinem:

$$\frac{3}{4} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{x}} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{x}{12} \Rightarrow x = \frac{3 \cdot 12}{4} = 9 \text{ ore.}$$





## 6.3. Regula de trei compusă

Regula de trei compusă antrenează în rezolvarea unei probleme şi mărimi direct proporţionale şi mărimi invers proporţionale.

*Exemplu:* 10 ţărani termină de săpat 1500 ha de teren în 15 zile lucrând câte 8 ore pe zi. Aflaţi câte hectare pot săpa 15 ţărani dacă lucrează 6 ore pe zi timp de 12 zile.

*Rezolvare:*

10 ţ ..... 1500 ha ..... 15 zile ..... 8 h/zi

15 ţ ..... $x$ ha ..... 12 zile ..... 6 h/zi

Avem

10 ţ ..... 1500 ha ..... 15 zile ..... 8 h/zi

1 ţ ..... $\frac{1500}{10}$ ha ..... 15 zile ..... 8 h/zi — d.p.

1 ţ ..... $\frac{15 \cdot 1500}{10}$ ha ..... 1 zi ..... 8 h/zi — i.p.

1 ţ ..... $\frac{15 \cdot 1500}{10} \cdot \frac{6}{8}$ ha ..... 1 zi ..... 6 h/zi — d.p.

1 ţ ..... $\frac{15 \cdot 1500 \cdot 6 \cdot 12}{10 \cdot 8}$ ha ..... 12 zile ..... 6 h/zi — d.p.

15 ţ ..... $\frac{15 \cdot 1500 \cdot 6 \cdot 12}{10 \cdot 8} \cdot \frac{1}{15}$ ha ..... 12 zile ..... 6 h/zi — i.p.

În concluzie, $x = \frac{15 \cdot 1500 \cdot 6 \cdot 12}{10 \cdot 8 \cdot 15} = 1350$ ha.

# 7. Calcul algebric

## 7.1. Distributivitatea înmulțirii față de adunare și scădere

### Produsul unui număr real cu o sumă algebrică

Produsul unui număr real cu o sumă (sau o diferență) algebrică se efectuează înmulțind numărul cu fiecare termen al sumei (sau diferenței).

$a \cdot (x+y) = a \cdot x + a \cdot y$, $\forall\, a, x, y \in \mathbf{R}$.

$a \cdot (x-y) = a \cdot x - a \cdot y$, $\forall\, a, x, y \in \mathbf{R}$.

$a(x_1 + x_2 - x_3 + \ldots) = a \cdot x_1 + a \cdot x_2 - a \cdot x_3 + \ldots$,
$\forall\, a \in \mathbf{R}$ și $x_i \in \mathbf{R}$, $i \in \mathbf{N}^*$.

### Produsul dintre două sume algebrice

Produsul dintre două sume algebrice se efectuează înmulțind fiecare termen al unei sume (sau diferențe) cu fiecare termen al celeilalte.

$(a-b+c)(x+y-z) = a \cdot x + a \cdot y - a \cdot z - b \cdot x - b \cdot y + b \cdot z + c \cdot x + c \cdot y - c \cdot z$.

## 7.2. Formule de calcul prescurtat

1. Produs de sumă și diferență:
   $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$, $\forall\, a, b \in \mathbf{R}$.
2. Pătratul binomului:
   - sumă: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $\forall\, a, b \in \mathbf{R}$.
   - diferență: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, $\forall\, a, b \in \mathbf{R}$.
3. Pătratul trinomului:
   $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$, $\forall a, b, c \in \mathbf{R}$.





4. Diferență de cuburi:
   $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$, $\forall\, a, b \in \mathbf{R}$.
5. Sumă de cuburi:
   $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$, $\forall\, a, b \in \mathbf{R}$.
6. Cubul binomului:
   - sumă: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, $\forall\, a, b \in \mathbf{R}$.
   - diferență: $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$, $\forall\, a, b \in \mathbf{R}$.

## 7.3. Descompunerea în factori

Se aplică proprietatea de distribitivitate a înmulțirii față de adunare și scădere, formulele de restrângere a pătratelor unui binom sau trinom, precum și celelalte formule de calcul prescurtat cunoscute.

### Formule de descompunere în factori

1. Restrângerea pătratului unui binom:
   $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$, $\forall\, a, b \in \mathbf{R}$;
   $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$, $\forall\, a, b \in \mathbf{R}$.
2. Restrângerea pătratului unui trinom:
   $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = (a+b+c)^2$, $\forall\, a, b, c \in \mathbf{R}$.
3. Diferența de pătrate:
   $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, $\forall\, a, b \in \mathbf{R}$.
4. Diferența de cuburi:
   $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$, $\forall\, a, b \in \mathbf{R}$.
5. Suma de cuburi:
   $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$, $\forall\, a, b \in \mathbf{R}$.
6. Restrângerea cubului unui binom:
   $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3$, $\forall\, a, b \in \mathbf{R}$;
   $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a-b)^3$, $\forall\, a, b \in \mathbf{R}$.

*Exemple:*

1. $12a^3b^2 + 18a^2b^3 = 6a^2b^2(2a+3b)$.
2. $9a^2 + 6a + 1 = (3a+1)^2$.
3. $16a^2 - 9b^2 = (4a-3b)(4a+3b)$.

*Observație:* Putem folosi mai multe formule în rezolvarea unui exercițiu.

*Exemplu:* $9a^2 - 12ab + 4b^2 - 25 = (3a-2b)^2 - 5^2 =$
$= (3a-2b+5)(3a-2b-5)$.

## 7.4. Inegalități de numere reale

Din formulele de calcul prescurtat și din inegalitatea mediilor ($m_h \leq m_g < m_a$) rezultă următoarele inegalități uzuale:

1. $a^2 + b^2 \geq 2ab$, $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$;
2. $a + b \geq 2\sqrt{ab}$, $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$ $(m_a \geq m_g)$;
3. $a + \frac{1}{a} \geq 2$, $\forall\, a \in \mathbb{R}$ $(m_a \geq m_g)$;
4. $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$, $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$.



Capitolul VI

# Ecuații

## 1. Ecuația de gradul întâi cu o necunoscută

### 1.1. Noțiuni generale

***Definiții:***

♦ Propoziția $ax + b = 0$, cu $a, b, x \in \mathbb{R}$ și $a \neq 0$, se numește **ecuație de gradul întâi cu o necunoscută**.

$x$ — se numește **necunoscută**,

$a, b$ — se numesc **coeficienți**: $a$ **coeficientul necunoscutei** $x$, $b$ **termenul liber**.

♦ Numărul real $x_0$ se numește **soluție** a ecuației $ax + b = 0$, $a, b, x \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, dacă propoziția $ax_0 + b = 0$ este adevărată.

♦ Procesul de aflare a soluției se numește **rezolvarea ecuației**.

### 1.2. Rezolvarea ecuației de gradul întâi

Fie ecuația de gradul întâi $ax + b = 0$, cu $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Avem $ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$. Spunem că:

- *soluția ecuației* este numărul real $x_0 = -\frac{b}{a}$;
- *mulțimea soluțiilor ecuației* este $S = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$.

## 2. Ecuația de gradul al doilea cu o necunoscută

### 2.1. Noțiuni generale

***Definiții:***

♦ Propoziția $ax^2 + bx + c = 0$, cu $a, b, c, x \in \mathbb{R}$ și $a \neq 0$, se numește **ecuație de gradul al doilea cu o necunoscută.**

$x$ — se numește **necunoscută**,

$a, b, c$ — se numesc **coeficienți**: $a$ și $b$ **coeficienții necunoscutei** $x$, $c$ **termenul liber**.

♦ Numărul real $x_0$ se numește **soluție** a ecuației $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c, x \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, dacă propoziția $ax_0^2 + bx_0 + c = 0$ este adevărată.

♦ Procesul de aflare a soluției se numește **rezolvarea ecuației**.

♦ Numărul real $\Delta = b^2 - 4ac$ se numește **discriminantul ecuației de gradul al doilea**.

## 2.2. Rezolvarea ecuației de gradul al doilea

**1.** Se calculează discriminantul ecuației: $\Delta = b^2 - 4ac$.

**2.** a) Dacă $\Delta < 0$, atunci ecuația nu are soluții reale; mulțimea soluțiilor este $S = \varnothing$.

b) Dacă $\Delta = 0$, atunci ecuația are soluțiile confundate $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$; mulțimea soluțiilor este $S = \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$.

c) Dacă $\Delta > 0$, atunci ecuația are soluțiile $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$; mulțimea soluțiilor este $S = \left\{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$.

*Exemplu:* Rezolvați ecuația $x^2 - 3x + 2 = 0, x \in \mathbb{R}$.

*Rezolvare:*

$a = 1, b = -3, c = 2 \Rightarrow \Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \end{cases}.$$



Capitolul VII

# Inecuația de gradul întâi cu o necunoscută

## 1. Noțiuni generale

***Definiții:***

♦ Propozițiile de forma $ax + b < 0$, $ax + b \leqslant 0$, $ax + b > 0$ sau $ax + b \geqslant 0$, cu $a, b, x \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ se numesc inecuații de gradul întâi cu o necunoscută.

$x$ — se numește **necunoscută**;

$a, b$ — se numesc **coeficienții necunoscutei** $x$.

♦ **Soluțiile** inecuațiilor sunt intervale de numere reale.

♦ Procesul de aflare a soluției se numește **rezolvarea inecuației**.

## 2. Rezolvarea inecuațiilor

**1.** $ax + b \geq 0 \Rightarrow ax \geqslant -b \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \geqslant -\frac{b}{a}, \text{ dacă } a > 0 \\ x \leqslant -\frac{b}{a}, \text{ dacă } a < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in \left[-\frac{b}{a}, +\infty\right), \text{ dacă } a > 0 \\ x \in \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right], \text{ dacă } a < 0 \end{cases}.$$

**2.** $ax + b \leqslant 0 \Rightarrow ax \leqslant -b \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \leqslant -\frac{b}{a}, \text{ dacă } a > 0 \\ x \geqslant -\frac{b}{a}, \text{ dacă } a < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right], \text{ dacă } a > 0 \\ x \in \left[-\frac{b}{a}, +\infty\right), \text{ dacă } a < 0 \end{cases}.$$

*Observație:* În mod asemănător se rezolvă și inecuațiile $ax + b > 0$ și $ax + b < 0$, numai că soluția e reprezentată de intervale nemărginite deschise.

Capitolul VIII

# Ecuații și sisteme de ecuații de gradul întâi cu două necunoscute

## 1. Ecuații de gradul întâi cu două necunoscute

***Definiții:***

♦ Propoziția $ax + by + c = 0$, cu $a, b, c, x, y \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ și $b \neq 0$, se numește **ecuație de gradul întâi cu două necunoscute.**

$x, y$ — se numesc **necunoscute;**

$a, b, c$ — se numesc **coeficienți**: $a$ **coeficientul lui** $x$, $b$ **coeficientul lui** $y$, $c$ **termenul liber.**

♦ Perechea de numere reale $(x_0, y_0)$ se numește **soluție** a ecuației $ax + by + c = 0$, $a, b, c, x, y \in \mathbb{R}$, $a, b \neq 0$, dacă propoziția $ax_0 + by_0 + c = 0$ este adevărată.

## 2. Sisteme de ecuații de gradul întâi cu două necunoscute

### 2.1. Noțiuni generale

***Definiții:***

♦ Două ecuații de gradul întâi cu două necunoscute formează un **sistem de ecuații de gradul întâi cu două necunoscute:**

$$(s)\ \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases},\ a, b, a', b' \in \mathbb{R}^*,\ x, y, c, c' \in \mathbb{R}.$$

♦ Perechea de numere reale $(x_0, y_0)$ se numește **soluție** a sistemului (s) dacă propozițiile $ax_0 + by_0 = c$ și $a'x_0 + b'y_0 = c'$ sunt simultan adevărate.

♦ Procesul de aflare a soluției sistemului se numește **rezolvarea sistemului.**





### 2.2. Rezolvarea sistemelor de ecuații de gradul întâi

Există două metode importante de rezolvare a sistemelor: *metoda reducerii* și *metoda substituției.*

**Metoda reducerii**

$$\begin{cases} ax + by = c \ \ |\cdot b' \\ a'x + b'y = c' \ |\cdot(-b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab'x + bb'y = cb' \\ -a'bx - bb'y = -c'b \end{cases}$$

$$\overline{x(ab' - a'b) \ / = cb' - c'b}$$

Dacă $ab' - a'b \neq 0$, atunci $x_0 = \dfrac{cb' - c'b}{ab' - a'b}$.

Dacă $ab' - a'b = 0$ și $cb' - c'b = 0$, atunci orice număr real $x_0$ este soluție.

Dacă $ab' - a'b = 0$ și $cb' - c'b \neq 0$, atunci nu există $x_0$ real.

$$\begin{cases} ax + by = c \ \ |\cdot(-a') \\ a'x + b'y = c' \ |\cdot a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -aa'x - a'by = -a'c \\ aa'x + ab'y = ac' \end{cases}$$

$$\overline{/\, y(ab' - a'b) = ac' - a'c}$$

Dacă $ab' - a'b \neq 0$, atunci $y_0 = \dfrac{ac' - a'c}{ab' - a'b}$.

Dacă $ab' - a'b = 0$ și $ac' - a'c = 0$, atunci orice număr real $y_0$ este soluție.

Dacă $ab' - a'b = 0$ și $ac' - a'c \neq 0$, atunci nu există $y_0$ real.

*Concluzie:* **Mulțimea soluțiilor sistemului** este:

♦ $S = \left\{\left(\dfrac{cb' - c'b}{ab' - a'b}, \dfrac{ac' - a'c}{ab' - a'b}\right)\right\}$, dacă $ab' - a'b \neq 0$;

♦ $S = \{(x_0, y_0) \mid x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ care verifică sistemul$\}$, dacă $ab' - a'b = 0$, $cb' - c'b = 0$ și $ac' - a'c = 0$;

♦ $S=\emptyset$, dacă $ab'-a'b=0$ și $cb'-c'b\neq 0$ sau $ac'-a'c\neq 0$.

*Exemplu:* Rezolvați sistemul $\begin{cases}3x+2y=7\\2x+3y=8\end{cases}$.

*Rezolvare:*

$$\begin{cases}3x+2y=7 \mid\cdot 3\\2x+3y=8 \mid\cdot(-2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}9x+6y=21\\-4x-6y=-16\end{cases}$$

$$5x \;/\; =5 \Rightarrow x=1$$

$$\begin{cases}3x+2y=7 \mid\cdot 2\\2x+3y=8 \mid\cdot(-3)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6x+4y=14\\-6x-9y=-24\end{cases}$$

$$/\; -5y=-10 \Rightarrow y=2$$

Mulțimea soluțiilor sistemului este $S=\{(1,2)\}$.

## Metoda substituției

$$\begin{cases}ax+by=c\\a'x+b'y=c'\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}ax=c-by\\a'x+b'y=c'\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{c-by}{a}\\a'x+b'y=c'\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{c-by}{a}\\a'\cdot\dfrac{c-by}{a}+{}^{a)}b'y={}^{a)}c'\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{c-by}{a}\\a'c-a'by+ab'y=ac'\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{c-by}{a}\\y(ab'-a'b)=ac'-a'c\end{cases}.$$

Dacă $ab'-a'b\neq 0$, atunci $\begin{cases}y_0=\dfrac{ac'-a'c}{ab'-a'b}\\x_0=\dfrac{cb'-c'b}{ab'-a'b}\end{cases}$.





Dacă $ab'-a'b=0$ și $ac'-a'c=0$, atunci $y_0\in\mathbf{R}$ și $x_0=\dfrac{c-by_0}{a}$.

Dacă $ab'-a'b=0$ și $ac'-a'c\neq 0$, atunci nu există $y_0$ real, deci sistemul nu are soluții.

*Concluzie:* **Mulțimea soluțiilor sistemului** este:

♦ $S=\left\{\left(\dfrac{cb'-c'b}{ab'-a'b},\dfrac{ac'-a'c}{ab'-a'b}\right)\right\}$, dacă $ab'-a'b\neq 0$;

♦ $S=\left\{\left(\dfrac{c-by_0}{a},y_0\right)\mid y_0\in\mathbf{R}\right\}$ sau

$S=\left\{\left(x_0,\dfrac{c-ax_0}{b}\right)\mid x_0\in\mathbf{R}\right\}$, dacă $ab'-a'b=0$ și $ac'-a'c=0$ sau $cb'-c'b=0$.

♦ $S=\emptyset$, dacă $ab'-a'b=0$ și $ac'-a'c\neq 0$ sau $cb'-c'b\neq 0$.

*Exemplu:* Rezolvați sistemul $\begin{cases}x-3y=1\\2x+y=9\end{cases}$.

*Rezolvare:*

$$\begin{cases}x-3y=1\\2x+y=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1+3y\\2x+y=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1+3y\\2\cdot(1+3y)+y=9\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=1+3y\\2+6y+y=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1+3y\\7y=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=1\\x=4\end{cases}.$$

*Observație:* În rezolvarea uzuală a sistemelor, cele două metode se folosesc în mod combinat.

Capitolul IX

# Rezolvarea problemelor cu ajutorul ecuațiilor

Pentru a rezolva o problemă cu ajutorul ecuațiilor sau a sistemelor de ecuații se parcurg următorii pași:

*Pas 1:* Alegerea necunoscutelor.

*Pas 2:* Scrierea ecuației sau ecuațiilor problemei.

*Pas 3:* Rezolvarea ecuației sau a sistemului.

*Pas 4:* Interpretarea soluției obținute.

*Exemplu:* Suma a două numere este 7. Aflați numerele știind că diferența dintre triplul primului număr și dublul celui de-al doilea este 6.

*Rezolvare:*

*Pas 1:* Fie $x$ primul număr și $y$ cel de al doilea număr.

*Pas 2:* $\begin{cases} x+y=7 \\ 3x-2y=6 \end{cases}$.

*Pas 3:* $\begin{cases} x+y=7 \\ 3x-2y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7-y \\ 3(7-y)-2y=6 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=7-y \\ 21-3y-2y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7-y \\ 15=5y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3 \\ x=4 \end{cases}$.

*Pas 4:* Cele două numere sunt 4 și 3.



Capitolul X

# Funcții

## 1. Noțiuni generale

***Definiții:***

♦ Fie $A$ și $B$ două mulțimi nevide. Se numește **funcție definită pe $A$ cu valori în $B$** o aplicație care face ca oricărui element din $A$ să-i corespundă un unic element din $B$.

*Notație:* $f: A \to B$ sau $x \mapsto f(x), \forall x \in A, f(x) \in B$.

$A$ — se numește **domeniu de definiție**,

$B$ — se numește **codomeniu**.

♦ Fie $f: A \to B$ o funcție. Mulțimea $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A \text{ și } f(x) \in B\}$ se numește **graficul funcției $f$**.

*Observații:*

**1.** $G_f \subseteq A \times B$.

**2.** A reprezenta geometric graficul funcției $f$ înseamnă a reprezenta geometric, într-un sistem de axe, punctele determinate de perechile de numere din mulțimea $G_f$. Pentru simplificarea limbajului, în loc de **reprezentarea geometrică a graficului funcției $f$** se folosește **reprezentarea graficului funcției $f$.**

## 2. Funcția liniară

***Definiție:*** Funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = ax + b$, cu $a, b \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$, se numește **funcție liniară**.

*Observație:* Denumirea de funcție liniară provine din faptul că punctele graficului acestei funcții sunt coliniare, deci determină o dreaptă.

## 2.1. Monotonia funcției liniare

Funcția liniară $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, dată prin $f(x) = ax + b$, cu $a, b \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$, este:

- ♦ strict crescătoare, dacă $a > 0$;
- ♦ strict descrescătoare, dacă $a < 0$.

## 2.2. Semnul funcției liniare

Fie funcția liniară $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, dată prin $f(x) = ax + b$, cu $a, b \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$.

**Ecuația asociată funcției** $f$ este: $f(x) = 0$.

$$f(x) = 0 \Rightarrow ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}.$$

Semnul funcției liniare $f$ poate fi centralizat în tabelul următor:

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{b}{a}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | semn contrar lui $a$ | | 0 | semnul lui $a$ | |

## 2.3. Reprezentarea grafică a funcției liniare

Deoarece reprezentarea grafică a unei funcții liniare $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = ax + b$, cu $a, b \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$, este o dreaptă, sunt suficiente două puncte pentru a realiza această reprezentare.

*Observație:* Aceste două puncte pot fi tocmai punctele de intersecție ale reprezentării grafice a funcției $f$ cu axele de coordonate.

### Intersecția reprezentării grafice cu axele de coordonate

♦ *Intersecția cu axa Ox:* $G_f \cap Ox = \{(x_0, 0) \mid f(x_0) = 0\}$

$$f(x_0) = 0 \Rightarrow ax_0 + b = 0 \Rightarrow x_0 = -\frac{b}{a}.$$





$$G_f \cap Ox = \left\{\left(-\frac{b}{a}, 0\right)\right\}.$$

♦ *Intersecția cu axa Oy:* $G_f \cap Oy = \{(0, f(0))\}$

$f(0) = a \cdot 0 + b = b.$

$G_f \cap Oy = \{(0, b)\}.$

*Observație:* Reprezentarea grafică a unei funcții liniare $f: D \to \mathbf{R}$, $D \subseteq \mathbf{R}$ mulțime, dată prin $f(x) = ax + b$, cu $a, b \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$, se face în mai multe etape:

**1.** Se alcătuiește tabelul de variație în care se aleg două puncte din domeniul de definiție.

**2.** Se unesc punctele și se prelungește segmentul pe domeniul de definiție al funcției.

Reprezentarea grafică a funcției liniare $f: D \to \mathbf{R}$, $D \subseteq \mathbf{R}$ mulțime, $f(x) = ax + b$, cu $a, b \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$, este o dreaptă, o semidreaptă, un segment sau o mulțime de puncte din plan, în funcție de tipul domeniului de definiție $D$.

## 2.4. Exemple de funcții liniare

### Funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = ax + b$

Există două situații:

**I.** $a > 0$

- $b \geqslant 0$

Tabelul de variație:

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{b}{a}$ | 0 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | 0 | $b$ | |

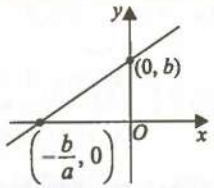
Reprezentarea grafică este o dreaptă.

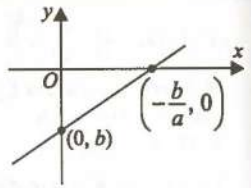
- $b \leqslant 0$

Tabelul de variație:

| $x$ | $-\infty$ | | 0 | $-\frac{b}{a}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | $b$ | 0 | |

Reprezentarea grafică este o dreaptă.



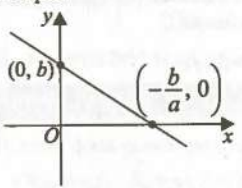

**II.** $a < 0$

• $b \geqslant 0$

Tabelul de variație:

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | $-\frac{b}{a}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $b$ | $0$ | | |

Reprezentarea grafică este o dreaptă.

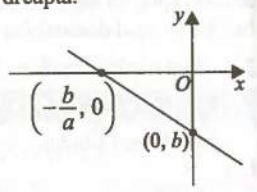



• $b \leqslant 0$

Tabelul de variație:

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{b}{a}$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $0$ | $b$ | | |

Reprezentarea grafică este o dreaptă.

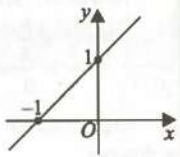



*Exemplu:* Reprezentați grafic funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, dată prin $f(x) = x + 1$.

*Rezolvare:*

Realizăm mai întâi tabelul de variație.

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $0$ | $1$ | | |








## Funcția $f: (-\infty, m] \to \mathbf{R}, m \in \mathbf{R}, f(x) = ax + b$

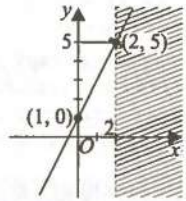
Reprezentarea grafică este o semidreaptă închisă cu originea în punctul de coordonate $(m, f(m)) = (m, am + b)$.

*Exemplu:* Reprezentați grafic funcția $f: (-\infty, 2] \to \mathbf{R}$, dată prin $f(x) = 2x + 1$.

*Rezolvare:*

Tabelul de variație este:

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $1$ | | $5$ | |




Reprezentarea grafică a acestei funcții este o semidreaptă cu originea în punctul de coordonate (2, 5).

*Observație:* Reprezentarea grafică a unei funcții de forma $f: (-\infty, m) \to \mathbf{R}$, $f: (m, +\infty) \to \mathbf{R}$ sau $f: [m, +\infty) \to \mathbf{R}$, cu $m \in \mathbf{R}$, dată prin expresia $f(x) = ax + b$, cu $a, b \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$, este o semidreaptă deschisă sau închisă (după cum mulțimea de definiție este interval deschis sau închis), cu originea în punctul de coordonate $(m, am + b)$.

## Funcția $f: [m, n] \to \mathbf{R}, m, n \in \mathbf{R}, m < n, f(x) = ax + b$

Reprezentarea grafică este un segment de dreaptă închis cu capetele în punctele de coordonate $(m, am + b)$ și $(n, an + b)$.

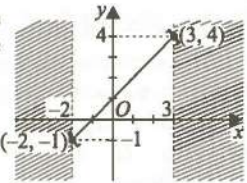
*Exemplu:* Reprezentați grafic funcția $f: [-2, 3] \to \mathbf{R}$, dată prin $f(x) = x + 1$.

*Rezolvare:*

Tabelul de variație este:

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | $0$ | $3$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $-1$ | | $1$ | $4$ | |

Graficul acestei funcții este un segment ale cărui capete sunt punctele de coordonate $(-2, -1)$ și $(3, 4)$.




*Observație:* Reprezentarea grafică a unei funcții de forma $f: (m, n] \to \mathbb{R}$, $f: [m, n) \to \mathbb{R}$ sau $f: (m, n) \to \mathbb{R}$, cu $m, n \in \mathbb{R}$, $m < n$, dată prin expresia $f(x) = ax + b$, cu $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, este un segment de dreaptă deschis la un capăt și închis la celălalt sau deschis la ambele capete (după cum mulțimea de definiție e un interval deschis la unul dintre capete sau la amândouă). Capetele segmentului sunt în punctele de coordonate $(m, am + b)$ și $(n, an + b)$.

## Funcția $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ mulțime discretă, $f(x) = ax + b$

Reprezentarea grafică este o mulțime (discretă) de puncte din plan:

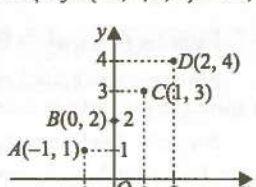
$G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in D\}$.

*Exemplu:* Reprezentați grafic funcția $f: \{-1, 0, 1, 2\} \to \mathbb{R}$, dată prin $f(x) = x + 2$.

*Rezolvare:*

Tabelul de variație este:

| $x$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |




Graficul acestei funcții este o mulțime de puncte.

$G_f = \{A(-1, 1); B(0, 2); C(1, 3); D(2, 4)\}$.



GEOMETRIE

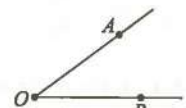
Capitolul I

# Unghiul

## 1. Noțiuni generale

***Definiții:***

♦ Figura geometrică formată din două semidrepte închise care au aceeași origine se numește **unghi**. Cele două semidrepte se numesc **laturile unghiului**, iar originea lor comună, **vârful unghiului**.




*Notații:* $[OA$, $[OB$ — laturile unghiului

$\widehat{AOB}$ sau $\sphericalangle AOB$ — unghiul

♦ Unitatea de măsură a unghiului este **gradul** (°). Numărul de grade al unui unghi se numește **măsura unghiului**.

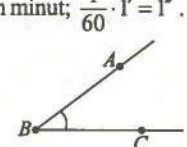
**Submultiplii** gradului sunt:

• minutul ($'$): $1' =$ a 60-a parte dintr-un grad; $\frac{1}{60} \cdot 1^\circ = 1'$;

• secunda ($''$): $1'' =$ a 60-a parte dintr-un minut; $\frac{1}{60} \cdot 1' = 1''$.

Deci: $1^\circ = 60'$ și $1' = 60''$.

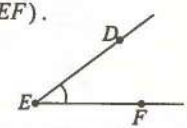
Două unghiuri sunt **congruente** *dacă au aceeași măsură.*



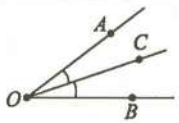

$\widehat{ABC} \equiv \widehat{DEF}$ dacă $m(\widehat{ABC}) \equiv m(\widehat{DEF})$.

*Reciproc:*

Dacă $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{DEF})$, atunci $\widehat{ABC} \equiv \widehat{DEF}$.



***Definiție:*** **Bisectoarea unghiului** este o semidreaptă interioară unghiului, ce determină cu laturile acestuia două unghiuri congruente.




$$\left.\begin{array}{l}(OC \subset (\widehat{AOB}) \\ \widehat{AOC} \equiv \widehat{COB}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow (OC$ – bisectoarea $\widehat{AOB}$.

## 2. Clasificarea unghiurilor

### 2.1. Unghi impropriu, unghi propriu

În funcție de **mărimea lor**, unghiurile pot fi:

♦ **unghi impropriu**

$m(\widehat{AOB}) = 0°$

• **unghi nul** — format de două semidrepte (laturi) care coincid; are măsura egală cu 0°;

$m(\widehat{AOB}) = 180°$

• **unghi alungit** — format de două semidrepte opuse; are măsura egală cu 180°.

♦ **unghi propriu** (care nu este nici nul, nici alungit)

• **unghi ascuțit** — are măsura mai mică decât 90°;

• **unghi drept** — are măsura egală cu 90°;

• **unghi obtuz** — are măsura mai mare decât 90°.

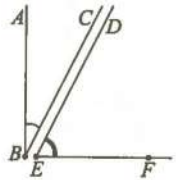




### 2.2. Perechi de unghiuri

Există patru tipuri de perechi de unghiuri:

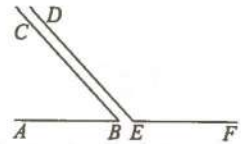
♦ **complementare** — două unghiuri pentru care suma măsurilor lor este de 90°.




$m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{DEF}) = 90° \Rightarrow$

$\Rightarrow \widehat{ABC}, \widehat{DEF}$ complementare.

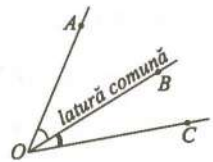
♦ **suplementare** — două unghiuri pentru care suma măsurilor lor este de 180°.




$m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{DEF}) = 180° \Rightarrow$

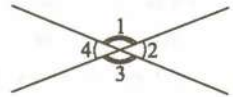
$\Rightarrow \widehat{ABC}, \widehat{DEF}$ suplementare.

♦ **adiacente** — două unghiuri care au același vârf, o latură comună, iar laturile necomune sunt situate de o parte și de alta a laturii comune.




Unghiurile $\widehat{AOB}$ și $\widehat{BOC}$ sunt adiacente.

♦ **opuse la vârf** — două unghiuri care au același vârf, iar laturile lor sunt perechi de semidrepte opuse.




Unghiurile $\hat{1}$ și $\hat{3}$, respectiv $\hat{2}$ și $\hat{4}$ sunt opuse la vârf.

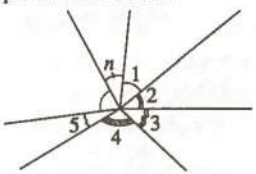
***Teoremă.*** Unghiurile opuse la vârf sunt congruente.

## 2.3. Unghiuri formate în jurul unui punct

Unghiurile formate în jurul unui punct au proprietățile:

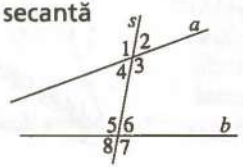
- au toate același vârf;
- orice punct al planului care nu aparține nici uneia dintre laturi aparține interiorului unui singur unghi.

***Teoremă:*** Suma măsurilor unghiurilor formate în jurul unui punct este de 360°.




$$m(\hat{1}) + m(\hat{2}) + ... + m(\hat{n}) = 360°$$

## 2.4. Unghiuri formate de două drepte tăiate de o secantă




*a*, *b* — drepte
*s* — secantă

Unghiurile formate de două drepte tăiate de o secantă sunt:

- **alterne externe:** $\hat{1}$ și $\hat{7}$; $\hat{2}$ și $\hat{8}$;
- **alterne interne:** $\hat{4}$ și $\hat{6}$; $\hat{3}$ și $\hat{5}$;
- **interne de aceeași parte a secantei:** $\hat{4}$ și $\hat{5}$; $\hat{3}$ și $\hat{6}$;
- **externe de aceeași parte a secantei:** $\hat{1}$ și $\hat{8}$; $\hat{2}$ și $\hat{7}$;
- **corespondente:** $\hat{1}$ și $\hat{5}$; $\hat{2}$ și $\hat{6}$; $\hat{3}$ și $\hat{7}$; $\hat{4}$ și $\hat{8}$.





***Teoreme:***

**T1.** Dacă două drepte paralele sunt tăiate de o secantă, atunci ele formează perechi de unghiuri:

- alterne interne congruente;
- alterne externe congruente;
- corespondente congruente;
- interne de aceeași parte a secantei, suplementare;
- externe de aceeași parte a secantei, suplementare.

**T2.** Dacă două drepte tăiate de o secantă formează unghiuri:

- alterne interne congruente

  *sau*

- alterne externe congruente

  *sau*

- corespondente congruente

  *sau*

- interne de aceeași parte a secantei, suplementare

  *sau*

- externe de aceeași parte a secantei, suplementare

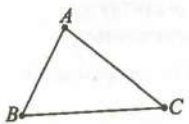
atunci dreptele sunt paralele.

Capitolul II

# Triunghiul

## 1. Noţiuni generale

***Definiţie:*** Figura geometrică formată din trei segmente determinate de trei puncte necoliniare se numeşte **triunghi**.




**Elementele triunghiului:**

- *vârfuri* — punctele $A, B, C$;
- *laturi* — $AB, BC, AC$;
- *unghiuri* — $\widehat{BAC}$, $\widehat{ACB}$, $\widehat{ABC}$.

## 2. Construcţia triunghiurilor

Se realizează folosind: rigla, echerul, raportorul, compasul.

***Cazuri de construcţie:***

### L.U.L. — latură - unghi - latură

Se cunosc lungimile a două laturi şi măsura unghiului dintre ele.

**Etape:**

✧ se construieşte, folosind raportorul, un unghi având măsura dată;

✧ pe fiecare dintre laturile unghiului se construieşte câte un segment având o extremitate fixată în vârful unghiului şi lungimea egală cu lungimea unuia dintre segmentele date;

✧ se unesc celelalte două extremităţi ale segmentelor anterior determinate, obţinându-se a treia latură a triunghiului.





### U.L.U. — unghi - latură - unghi

Se cunosc măsurile a două unghiuri şi lungimea laturii lor comune.

**Etape:**

✧ se construieşte un segment având lungimea dată;

✧ se construieşte unul dintre unghiurile de măsură dată, având vârful într-unul dintre capetele segmentului şi una din laturi incluzând segmentul construit;

✧ de aceeaşi parte a dreptei suport a segmentului se construieşte al doilea unghi, cu măsura cunoscută; vârful acestuia este în cel de-al doilea capăt al segmentului construit;

✧ se intersectează laturile necomune ale celor două unghiuri construite, determinându-se al treilea vârf al triunghiului.

### L.L.L. — latură - latură - latură

Se cunosc lungimile laturilor triunghiului.

**Etape:**

✧ se construieşte un segment având lungimea egală cu una dintre lungimile laturilor triunghiului;

✧ se trasează un semicerc cu centrul într-unul dintre capetele segmentului şi având lungimea razei egală cu lungimea celei de-a doua laturi a triunghiului;

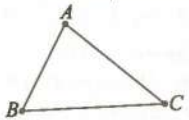
✧ se trasează un al doilea semicerc (de aceeaşi parte a dreptei suport a segmentului), cu centrul în al doilea capăt al segmentului şi având lungimea razei egală cu lungimea celei de-a treia laturi a triunghiului;

✧ intersecţia celor două semicercuri determină al treilea vârf al triunghiului.

## 3. Clasificarea triunghiurilor

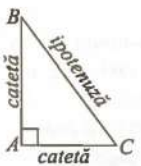
### 3.1. Clasificarea după măsura unghiurilor

În funcţie de măsura unghiurilor, triunghiurile pot fi:




♦ **triunghi ascuţitunghic** — are toate unghiurile ascuţite.

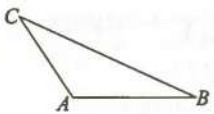
$m(\hat{A}) < 90°$, $m(\hat{B}) < 90°$, $m(\hat{C}) < 90°$.




♦ **triunghi dreptunghic** — un unghi al triunghiului este drept.

Latura care se opune unghiului drept se numeşte **ipotenuză**, iar celelalte laturi se numesc **catete**.

În figură, $m(\hat{A}) = 90°$.

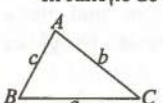



♦ **triunghi obtuzunghic** — un unghi al triunghiului este obtuz.

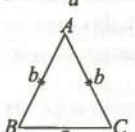
În figură, $m(\hat{A}) > 90°$.

### 3.2. Clasificarea după măsura laturilor

În funcţie de măsura laturilor, triunghiurile pot fi:




♦ **triunghi oarecare** — lungimile laturilor sunt diferite: $a \neq b \neq c \neq a$.



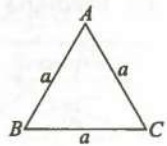

♦ **triunghi isoscel** — are două laturi congruente; cea de-a treia latură se numeşte **bază**.

În figură, $b = c$.





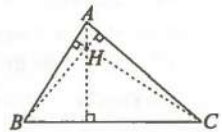
♦ **triunghi echilateral** — are toate laturile egale: $a = b = c$.




## 4. Linii importante în triunghi

### 4.1. Înălţimea

***Definiţie:*** **Înălţimea** este segmentul care uneşte un vârf al triunghiului cu piciorul perpendicularei duse din acel vârf pe latura opusă.

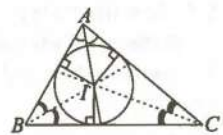



***Teoremă:*** Înălţimile unui triunghi sunt concurente.

Punctul de intersecţie al înălţimilor se notează cu ***H*** şi se numeşte **ortocentrul triunghiului**.

### 4.2. Bisectoarea

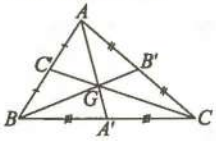
***Definiţie:*** **Bisectoarea unui unghi al triunghiului** este segmentul de pe bisectoarea unghiului respectiv, segment cuprins între vârful unghiului şi latura opusă acestuia.




***Teoremă:*** Bisectoarele unghiurilor unui triunghi sunt concurente într-un punct egal depărtat de laturile triunghiului.

Punctul de intersecţie al bisectoarelor se notează cu ***I*** şi este centrul unui cerc numit **cercul înscris în triunghi**.

## 4.3. Mediana




***Definiţie:*** **Mediana** este segmentul care uneşte un vârf al triunghiului cu mijlocul laturii opuse.

***Teoreme:***

**T1.** Medianele unui triunghi sunt concurente.

Punctul de intersecţie al medianelor se notează cu $G$ şi se numeşte **centrul de greutate al triunghiului**.

**T2.** Punctul $G$ se află pe fiecare mediană la două treimi de vârf şi o treime de bază.

$$AG=\frac{2}{3}AA' \text{ şi } GA'=\frac{1}{3}AA';$$

$$BG=\frac{1}{3}BB' \text{ şi } GB'=\frac{1}{3}BB';$$

$$CG=\frac{1}{3}CC' \text{ şi } GC'=\frac{1}{3}CC'.$$

## 4.4. Mediatoarea

***Definiţie:*** **Mediatoarea laturii unui triunghi** este dreapta perpendiculară pe mijlocul segmentului ce reprezintă latura respectivă.

***Teoremă:*** Mediatoarele laturilor unui triunghi sunt concurente într-un punct egal depărtat de vârfurile triunghiului.

Punctul de intersecţie al mediatoarelor se notează cu $O$ şi este centrul unui cerc căruia îi aparţin vârfurile triunghiului, numit **cercul circumscris triunghiului**.





Poziţionarea lui $O$ în funcţie de tipul triunghiului:

| Tip triunghi | Poziţionare $O$ | Reprezentare |
|---|---|---|
| ascuţitunghic | în interiorul triunghiului | |
| dreptunghic | mijlocul ipotenuzei | |
| obtuzunghic | în exteriorul triunghiului | |

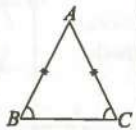
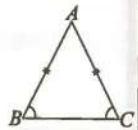
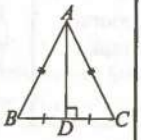
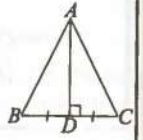
# 5. Proprietăţi ale triunghiurilor

## 5.1. Proprietăţile triunghiurilor isoscele

**Triunghi isoscel** = triunghi cu două laturi conguente.

**Vârful triunghiului isoscel** = punctul comun al laturilor congruente.

**Baza triunghiului isoscel** = latura opusă vârfului.

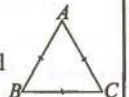
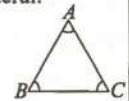
| Teoremă (proprietate) | Reciprocă |
|---|---|
| Dacă un triunghi este isoscel, atunci unghiurile alăturate bazei sunt congruente.<br>***Ipoteză:***<br>$\Delta ABC$ isoscel cu $[AB] \equiv [AC]$<br>***Concluzie:***<br>$\hat{B} \equiv \hat{C}$<br>  | Dacă două unghiuri ale unui triunghi sunt congruente, atunci triunghiul este isoscel.<br>***Ipoteză:***<br>$\Delta ABC$ cu $\hat{B} \equiv \hat{C}$<br>***Concluzie:***<br>$[AB] \equiv [AC]$, deci $\Delta ABC$ isoscel<br>  |
| Dacă un triunghi este isoscel, atunci mediana, bisectoarea și înălțimea duse din vârf pe bază coincid și sunt incluse în mediatoarea bazei.<br>***Ipoteză:***<br>$\Delta ABC$ isoscel cu $[AB] \equiv [AC]$<br>$[AD]$ – mediatoare<br>***Concluzie:***<br>$[AD]$ – înălțime, mediană, bisectoare<br>  | Dacă unul dintre vârfurile unui triunghi aparține mediatoarei laturii opuse, atunci triunghiul este isoscel, iar mediatoarea este bisectoare, mediană și înălțime.<br>***Ipoteză:***<br>$\Delta ABC$ cu $[AD]$ – mediatoare<br>***Concluzie:***<br>$\Delta ABC$ isoscel și $[AD]$ – înălțime, mediană, bisectoare.<br>  |





## 5.2. Proprietățile triunghiurilor echilaterale

**Triunghi echilateral** = triunghi cu toate laturile congruente.

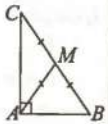
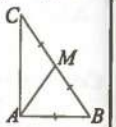
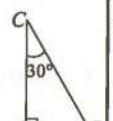
| Teoremă (proprietate) | Reciprocă |
|---|---|
| Dacă un triunghi este echilateral, atunci are toate unghiurile congruente.<br>***Ipoteză:***<br>$\Delta ABC$ echilateral<br>***Concluzie:***<br>$\hat{A} \equiv \hat{B} \equiv \hat{C}$ .<br>Avem:<br>$m(\hat{A}) = m(\hat{B}) = m(\hat{C}) = 60°$.<br>  | Dacă un triunghi are toate unghiurile congruente, atunci triunghiul este echilateral.<br>***Ipoteză:***<br>$\Delta ABC$ cu $\hat{A} \equiv \hat{B} \equiv \hat{C}$ .<br>***Concluzie:***<br>$[AB] \equiv [AC] \equiv [BC]$, deci $\Delta ABC$ echilateral.<br>  |

**Atenție!**

Triunghiul echilateral este un caz particular de triunghi isoscel; prin urmare, toate proprietățile triunghiului isoscel sunt valabile și pentru triunghiul echilateral, putând considera orice latură a sa ca bază.

## 5.3. Proprietățile triunghiurilor dreptunghice

**Triunghi dreptunghic** = triunghi care are un unghi drept.

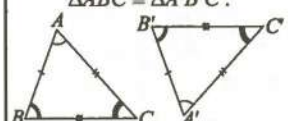
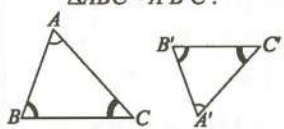
| Teoremă (proprietate) | Reciprocă |
|---|---|
| În orice triunghi dreptunghic, lungimea medianei dusă din vârful unghiului drept este egală cu jumătate din ipotenuză.<br>***Ipoteză:*** $\Delta ABC$ cu $m(\hat{A}) = 90°$, $[AM]$ mediană.<br>***Concluzie:*** $AM = \frac{BC}{2}$.   | Dacă într-un triunghi o mediană are lungimea egală cu jumătate din lungimea laturii corespunzătoare ei, atunci triunghiul este dreptunghic.<br>***Ipoteză:*** $\Delta ABC$ cu $[AM]$ mediană, $AM = \frac{BC}{2}$.  <br>***Concluzie:*** $m(\widehat{BAC}) = 90°$, deci $\Delta ABC$ dreptunghic. |
| ***Teorema unghiului de 30°*** | ***Reciprocă*** |
| Dacă un triunghi dreptunghic are un unghi de 30°, atunci lungimea catetei opuse acestuia este egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei.<br>***Ipoteză:*** $\Delta ABC$ cu $m(\hat{A}) = 90°$, $m(\hat{C}) = 30°$.<br>***Concluzie:*** $AB = \frac{BC}{2}$.   | Dacă o catetă a unui triunghi dreptunghic are lungimea egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei, atunci unghiul ce se opune acestei catete are măsura de 30°.<br>***Ipoteză:*** $\Delta ABC$ cu $m(\hat{A}) = 90°$, $AB = \frac{BC}{2}$. <br>***Concluzie:*** $m(\hat{C}) = 30°$. |





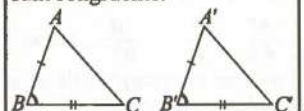
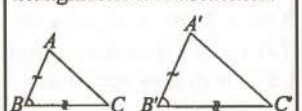
# 6. Congruența și asemănarea triunghiurilor

## 6.1. Noțiuni generale

| Congruență | Asemănare |
|---|---|
| Două triunghiuri sunt **congruente** dacă fiecare latură a unuia este congruentă cu o latură a celuilalt și fiecare unghi al unuia dintre triunghiuri este congruent cu un unghi al celuilalt.<br>Pentru $\Delta ABC$ și $\Delta A'B'C'$, dacă avem relațiile: $\hat{A} \equiv \hat{A}'$, $\hat{B} \equiv \hat{B}'$, $\hat{C} \equiv \hat{C}'$ și $[AB] \equiv [A'B']$, $[AC] \equiv [A'C']$, $[BC] \equiv [B'C']$, atunci spunem că triunghiurile sunt congruente și scriem $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$.  <br>Perechile de unghiuri congruente se numesc ***unghiuri corespunzătoare***, laturile care se opun unghiurilor corespunzătoare se numesc ***laturi corespunzătoare***. | Două triunghiuri sunt **asemenea** dacă între ele există o asemănare, adică dacă au unghiurile congruente și laturile respectiv proporționale.<br>Pentru $\Delta ABC$ și $\Delta A'B'C'$, dacă avem relațiile: $\hat{A} \equiv \hat{A}'$, $\hat{B} \equiv \hat{B}'$, $\hat{C} \equiv \hat{C}'$ și $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$, atunci spunem că triunghiurile sunt asemenea și scriem $\Delta ABC \sim A'B'C'$.  <br>Perechile de unghiuri congruente se numesc ***unghiuri corespondente*** (sau ***omoloage***), perechile de laturi care se opun unghiurilor corespondente se numesc ***laturi corespondente*** (sau ***omoloage***). |

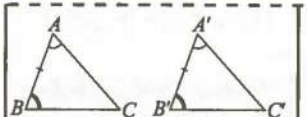
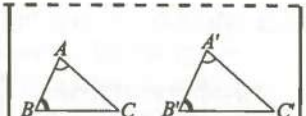
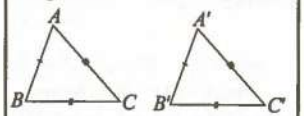
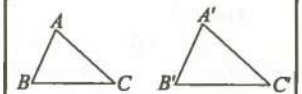
| | |
|---|---|
| $ABC \quad A'B'C' \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$<br>unghiuri corespunzătoare | $ABC \quad A'B'C' \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$<br>unghiuri corespondente |

## 6.2. Cazurile de congruenţă/asemănare

| Cazuri de congruenţă | Cazuri de asemănare |
|---|---|
| **L.U.L.**<br>Dacă două triunghiuri au câte două laturi şi unghiul format de acestea respectiv congruente, atunci triunghiurile sunt congruente.<br>  <br>$[AB] \equiv [A'B']$ şi<br>$[BC] \equiv [B'C']$<br>$\widehat{B} \equiv \widehat{B'}$ } L.U.L. $\Rightarrow$<br>$\Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$. | **L.U.L.**<br>Dacă două triunghiuri au două laturi respectiv proporţionale, iar unghiurile dintre acestea sunt congruente, atunci triunghiurile sunt asemenea.<br>  <br>$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$<br>$\widehat{B} \equiv \widehat{B'}$ } L.U.L. $\Rightarrow$<br>$\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$. |
| **U.L.U.**<br>Dacă două triunghiuri au câte două unghiuri şi latura lor comună respectiv congruente, atunci triunghiurile sunt congruente. | **U.U.**<br>Dacă două triunghiuri au două unghiuri respectiv congruente, atunci triunghiurile sunt asemenea. |





| | |
|---|---|
|  <br>$\widehat{A} \equiv \widehat{A'}$<br>$\widehat{B} \equiv \widehat{B'}$<br>$[AB] \equiv [A'B']$ } U.L.U. $\Rightarrow$<br>$\Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$. |  <br>$\widehat{A} \equiv \widehat{A'}$<br>$\widehat{B} \equiv \widehat{B'}$ } UU $\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$. |
| **L.L.L.**<br>Dacă două triunghiuri au toate laturile respectiv congruente, atunci triunghiurile sunt congruente.<br>  <br>$[AB] \equiv [A'B']$<br>$[AC] \equiv [A'C']$<br>$[BC] \equiv [B'C']$ } L.L.L. $\Rightarrow$<br>$\Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$. | **L.L.L.**<br>Dacă două triunghiuri au laturile respectiv proporţionale, atunci triunghiurile sunt asemenea.<br>  <br>$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$ L.L.L. $\Rightarrow$<br>$\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C$. |

## 6.3. Metode de determinare a triunghiurilor congruente/asemenea

| Metoda triunghiurilor congruente | Metoda triunghiurilor asemenea |
|---|---|
| *Metoda triunghiurilor congruente* este o metodă de demonstrație pe care o utilizăm pentru a arăta că două segmente sau două unghiuri sunt congruente. | Metoda triunghiurilor asemenea este o metodă de demonstrație pe care o utilizăm pentru a arăta că două segmente sunt proporționale sau că două unghiuri sunt congruente. |
| Găsim două triunghiuri pentru care putem demonstra că sunt congruente și în care segmentele sau unghiurile ce ne interesează sunt elemente corespunzătoare. | Găsim două triunghiuri pentru care putem demonstra că sunt asemenea și în care segmentele sau unghiurile care ne interesează sunt elemente corespondente. |

**Atenție!**

• Cazurile de asemănare se pot obține din cazurile de congruență, înlocuind relațiile de congruență dintre laturi cu relații de proporționalitate, dar păstrând neschimbate relațiile de congruență dintre unghiuri.

•Atât la congruența triunghiurilor cât și la asemănarea acestora trebuie să ținești cont de ordinea în care sunt scrise literele ce desemnează vârfurile, pentru a asigura o corespondență corectă între laturile și vârfurile triunghiurilor.

• În cazul asemănării, raportul a două laturi omoloage formează **raportul de asemănare a celor două triunghiuri**.





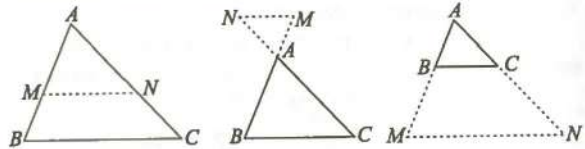
## 7. Rezultate importante în asemănarea triunghiurilor

**1.** ***Teorema fundamentală a asemănării — T.F.A.***

O paralelă dusă la una dintre laturile unui triunghi formează cu celelalte două laturi (sau cu prelungirile lor) un triunghi asemenea cu cel dat.

***Ipoteză:*** $\Delta ABC$ cu $MN \parallel BC$.

***Concluzie:*** $\Delta ABC \sim \Delta AMN$.



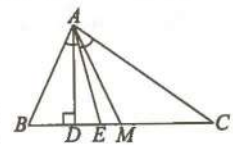

**2.** În două triunghiuri asemenea raportul medianelor, raportul bisectoarelor și raportul înălțimilor corespunzătoare laturilor omoloage sunt egale cu raportul de asemănare a triunghiurilor.

***Ipoteză:*** $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$,

$[AD], [A'D']$ – înălțimi omoloage,

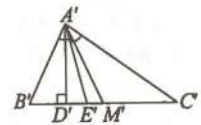
$[AE], [A'E']$ – bisectoare omoloage,

$[AM], [A'M']$ – mediane omoloage.

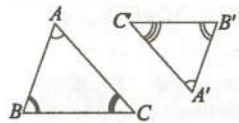



***Concluzie:***

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AD}{A'D'} = \frac{AE}{A'E'} = \frac{AM}{A'M'}.$$




**3.** Dacă două triunghiuri sunt asemenea, atunci raportul ariilor lor este egal cu pătratul raportului de asemănare.




*Ipoteză:* $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

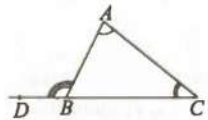
*Concluzie:* $\frac{A_{\Delta ABC}}{A_{\Delta A'B'C'}} = \left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2$.

## 8. Teoreme importante în triunghiuri oarecare

**T1.** În orice triunghi, suma măsurilor tuturor unghiurilor este 180°.

**T2.** ***Teorema unghiului exterior***

Măsura unui unghi exterior unui triunghi este egală cu suma măsurilor unghiurilor interioare neadiacente (nealăturate).



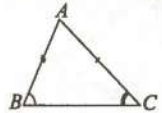

*Ipoteză:* $\Delta ABC$,

$\widehat{ABD}$ — unghi exterior.

*Concluzie:*

$m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{BAC}) + m(\widehat{BCA})$.

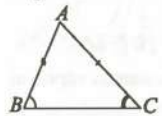
**T3.** În orice triunghi cu două laturi necongruente, laturii mai mari i se opune unghiul mai mare.




*Ipoteză:* $\Delta ABC$ cu $[AC] > [AB]$

*Concluzie:* $\widehat{ABC} > \widehat{ACB}$.

**T4.** În orice triunghi cu două unghiuri necongruente, unghiului mai mare i se opune latura mai mare.




*Ipoteză:* $\Delta ABC$ cu $\widehat{ABC} > \widehat{ACB}$.

*Concluzie:* $[AC] > [AB]$.





**Atenție!**

Cum în orice triunghi dreptunghic cel mai mare unghi este unghiul drept, rezultă că lungimea ipotenuzei acestuia este mai mare decât lungimea oricărei catete a sa.

**T5.** În orice triunghi, suma lungimilor a două laturi este mai mare decât lungimea celei de-a treia laturi.

*Ipoteză:* $\Delta ABC$.

*Concluzie:* $AB + BC > AC$

$AB + AC > BC$

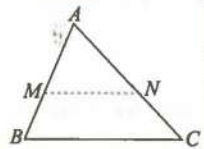
$BC + AC > AB$.

**T6.** ***Teorema lui Thales***

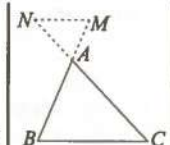
O paralelă dusă la una dintre laturile unui triunghi determină pe celelalte două laturi (sau pe prelungirile lor) segmente proporționale.

*Ipoteză:* $\Delta ABC$ cu $MN \parallel BC$, $M \in (AB)$, $N \in (AC)$.

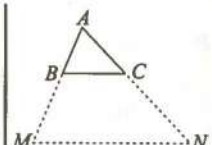
*Concluzie:*




$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$




$\frac{NA}{AC} = \frac{MA}{AB}$




$\frac{AB}{BM} = \frac{AC}{CN}$

**Atenție!**

Paralela $MN$ la una dintre laturile triunghiului (în acest caz, la $BC$) poate fi dusă în trei moduri: în interiorul triunghiului, deasupra vârfului sau sub bază.

**T7. *Reciproca teoremei lui Thales***

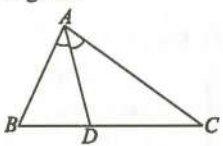
Dacă o dreaptă determină pe două laturi ale unui triunghi (sau pe prelungirile lor) segmente proporționale, atunci ea este paralelă cu cea de-a treia latură a triunghiului.

***Ipoteză:*** $\Delta ABC$ cu $M \in (AB)$, $N \in (AC)$ și $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$ sau $\frac{NA}{AC} = \frac{MA}{AB}$ sau $\frac{AB}{BM} = \frac{AC}{CN}$.

***Concluzie:*** $MN \parallel BC$.

**T8. *Teorema bisectoarei***

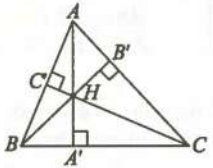
În orice triunghi, bisectoarea interioară a unui unghi împarte latura opusă în segmente proporționale cu laturile ce formează unghiul.




***Ipoteză:*** $\Delta ABC$ cu $[AD]$ bisectoarea unghiului $A$.

***Concluzie:*** $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$.

**T9.** În orice triunghi, produsul dintre lungimea înălțimii și lungimea laturii corespunzătoare ei este constant.




***Ipoteză:*** $\Delta ABC$ cu $AA' \perp BC$, $BB' \perp AC$ și $CC' \perp AB$.

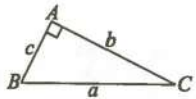
***Concluzie:*** $AA' \cdot BC = BB' \cdot AC = CC' \cdot AB \ (= 2 \cdot A_{\Delta ABC})$.





## 9. Teoreme importante în triunghiuri dreptunghice

**T1. *Teorema lui Pitagora***

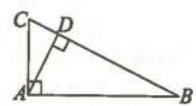
| Teorema directă | Reciproca |
|---|---|
| În orice triunghi dreptunghic, pătratul lungimii ipotenuzei este egal cu suma pătratelor lungimilor catetelor. | Dacă într-un triunghi, suma pătratelor lungimilor a două laturi este egală cu pătratul lungimii celei de-a treia laturi, atunci triunghiul este dreptunghic (cu unghiul drept în vârful care se opune laturii celei mai mari). |
|   | |
| ***Ipoteză:*** $\Delta ABC$ cu $m(\hat{A}) = 90°$. ***Concluzie:*** $BC^2 = AB^2 + AC^2$ sau $a^2 = c^2 + b^2$. | ***Ipoteză:*** $\Delta ABC$ cu $BC^2 = AB^2 + AC^2$. ***Concluzie:*** $\Delta ABC$ dreptunghic în $A$. |

**T2. *Teorema înălțimii***

În orice triunghi dreptunghic, lungimea înălțimii corespunzătoare ipotenuzei este media geometrică a lungimilor proiecțiilor catetelor pe ipotenuză.

***Ipoteză:*** $\Delta ABC$ cu $m(\hat{A}) = 90°$, $AD \perp BC$ $(D \in [BC])$.

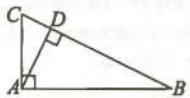
***Concluzie:*** $AD = \sqrt{BD \cdot CD}$ sau $AD^2 = BD \cdot CD$.



**T3. *Reciprocele teoremei înălțimii***

| Reciproca 1 | Reciproca 2 |
|---|---|
| ***Ipoteză:*** $\Delta ABC$ cu $AD \perp BC$ $(D \in [BC])$, $AD^2 = BD \cdot CD$. | ***Ipoteză:*** $\Delta ABC$ cu $m(\hat{A}) = 90°$ și $AD^2 = BD \cdot CD$ $(D \in [BC])$. |
| ***Concluzie:*** $m(\hat{A}) = 90°$. | ***Concluzie:*** $AD \perp BC$ |
| Această propoziție reciprocă *este adevărată* și se numește ***reciproca teoremei înălțimii***. | *Această reciprocă nu este adevărată.* |

**T4. *Teorema catetei***




În orice triunghi dreptunghic, lungimea unei catete este medie geometrică între lungimea ipotenuzei și lungimea proiecției catetei pe ipotenuză.

***Ipoteză:*** $\Delta ABC$ cu $m(\hat{A}) = 90°$ și $AD \perp BC$ $(D \in [BC])$.

***Concluzie:*** $AC = \sqrt{BC \cdot CD}$ *sau* $AC^2 = BC \cdot CD$;

$AB = \sqrt{BC \cdot BD}$ *sau* $AB^2 = BC \cdot BD$.

**T5. *Reciprocele teoremei catetei***

| Reciproca 1 | Reciproca 2 |
|---|---|
| ***Ipoteză:*** $\Delta ABC$ cu $AD \perp BC$ $(D \in [BC])$, $AC^2 = BC \cdot CD$. | ***Ipoteză:*** $\Delta ABC$ cu $m(\hat{A}) = 90°$ și $AC^2 = BC \cdot CD$ $(D \in [BC])$. |
| ***Concluzie:*** $m(\hat{A}) = 90°$. | ***Concluzie:*** $AD \perp BC$. |
| Această propoziție reciprocă *este adevărată* și se numește ***reciproca teoremei catetei***. | *Această reciprocă nu este adevărată.* |





## 10. Rapoarte constante în triunghiuri dreptunghice (elemente de trigonometrie)

- ***Sinusul*** unui unghi ascuțit = $= \dfrac{\text{lungimea catetei opuse unghiului}}{\text{lungimea ipotenuzei}}$
- ***Cosinusul*** unui unghi ascuțit = $= \dfrac{\text{lungimea catetei alăturate unghiului}}{\text{lungimea ipotenuzei}}$
- ***Tangenta*** unui unghi ascuțit = $= \dfrac{\text{lungimea catetei opuse unghiului}}{\text{lungimea catetei alăturate unghiului}}$
- ***Cotangenta*** unui unghi ascuțit = $= \dfrac{\text{lungimea catetei alăturate unghiului}}{\text{lungimea catetei opuse unghiului}}$

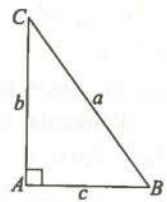
*În concluzie:*

$\sin B = \dfrac{b}{a}$, $\sin C = \dfrac{c}{a}$,

$\cos B = \dfrac{c}{a}$, $\cos C = \dfrac{b}{a}$,

$\operatorname{tg} B = \dfrac{b}{c}$, $\operatorname{tg} C = \dfrac{c}{b}$,

$\operatorname{ctg} B = \dfrac{c}{b}$, $\operatorname{ctg} C = \dfrac{b}{c}$.




În general, $\forall x \in [0°, 90°]$, avem:

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$;
- $\sin x = \cos(90° - x)$;
- $\cos x = \sin(90° - x)$;
- $\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg}(90° - x)$;
- $\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}(90° - x)$;
- $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, $\cos x \neq 0$;
- $\operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$, $\sin x \neq 0$.

## 11. Valori particulare ale funcțiilor trigonometrice

| funcție \ x | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° |
|---|---|---|---|---|---|
| sinx | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |
| cosx | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| tgx | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | nu există |
| ctgx | nu există | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0 |

**Atenție!**

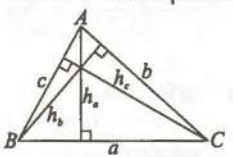
• Sinusul și cosinusul unui unghi ascuțit sunt mereu numere reale cuprinse între 0 și 1, deoarece reprezintă rapoarte dintre o catetă a unui triunghi dreptunghic și ipotenuza acestuia.

• Tangenta și cotangenta unui unghi ascuțit sunt numere reale pozitive, oricât de mari.

## 12. Formule pentru aria triunghiului

**Triunghiuri echivalente** = triunghiuri cu arii egale.

### 12.1. Formule pentru aria unui triunghi oarecare




**1.** Aria unui triunghi în funcție de o latură și înălțimea corespunzătoare acesteia:

$$A_{\Delta} = \frac{\text{baza} \cdot \text{înălțimea}}{2}.$$

$$A_{\Delta ABC} = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

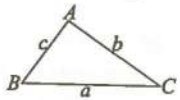




**2.** Aria unui triunghi în funcție de două laturi și unghiul $\alpha$ dintre ele:

• Cazul $\alpha < 90°$:

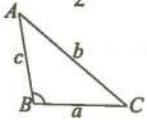
$$A_{\Delta} = \frac{\text{latură} \cdot \text{latură} \cdot \sin\alpha}{2}$$




$$A_{\Delta ABC} = \frac{a \cdot b \cdot \sin C}{2} = \frac{c \cdot a \cdot \sin B}{2} = \frac{b \cdot c \cdot \sin A}{2}.$$

• Cazul $\alpha > 90°$:

$$A_{\Delta} = \frac{\text{latură} \cdot \text{latură} \cdot \sin(180° - \alpha)}{2}$$




$$A_{\Delta ABC} = \frac{a \cdot c \cdot \sin(180° - B)}{2} = \frac{a \cdot b \cdot \sin C}{2} = \frac{b \cdot c \cdot \sin A}{2}.$$

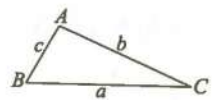
**3.** Aria unui triunghi în funcție de toate cele trei laturi:

$A_{\Delta} = \sqrt{p(p - \text{latura 1})(p - \text{latura 2})(p - \text{latura 3})}$,

unde $p$ = semiperimetrul triunghiului.

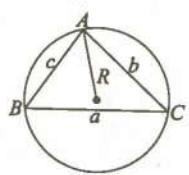
$$A_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

cu $p = \frac{a+b+c}{2}$.

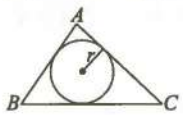



**4.** Aria unui triunghi în funcție de toate cele trei laturi și de raza cercului circumscris triunghiului:

$$A_{\Delta} = \frac{\text{latură} \cdot \text{latură} \cdot \text{latură}}{4 \cdot \text{raza cercului circumscris}}.$$




$$A_{\Delta ABC} = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$$

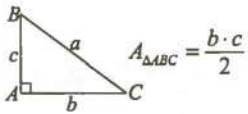



$A_{\Delta ABC} = p \cdot r$

**5.** Aria unui triunghi în funcție de semiperimetru și de raza cercului înscris în triunghi:

$A_{\Delta}$ = semiperimetru · raza cercului înscris.

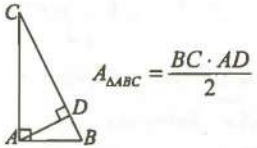
## 12.2. Formule pentru aria unui triunghi dreptunghic




$A_{\Delta ABC} = \frac{b \cdot c}{2}$

**1.** Aria unui triunghi dreptunghic în funcție de catete:

$A_{\Delta} = \frac{\text{catetă} \cdot \text{catetă}}{2}$.

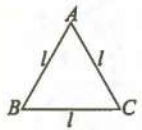



$A_{\Delta ABC} = \frac{BC \cdot AD}{2}$

**2.** Aria unui triunghi dreptunghic în funcție de ipotenuză și de înălțimea corespunzătoare ei:

$A_{\Delta} = \frac{\text{ipotenuză} \cdot \text{înălțime}}{2}$.

## 12.3. Formule pentru aria unui triunghi echilateral




Aria unui triunghi echilateral în funcție de latura sa: $A_{\Delta} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$.

**Atenție!**

Triunghiurile dreptunghice, respectiv echilaterale sunt cazuri particulare de triunghiuri oarecare; prin urmare, toate formulele de arie prezentate în cazul triunghiului oarecare sunt valabile și pentru triunghiurile dreptunghice, respectiv echilaterale.



Capitolul III

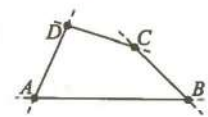
# Patrulatere

## 1. Noțiuni generale

***Definiții:***

♦ Figura geometrică formată din reuniunea segmentelor închise determinate de 4 puncte distincte, astfel încât oricare 3 dintre ele să fie necoliniare se numește **patrulater**.

♦ Spunem că un patrulater este ***convex*** dacă prelungind oricare dintre laturi, toate celelalte sunt situate de aceeași parte a acesteia.



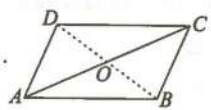

***Teoremă:*** În orice patrulater convex, suma măsurilor unghiurilor interioare este 360°.

## 2. Paralelogramul

### 2.1. Noțiuni generale

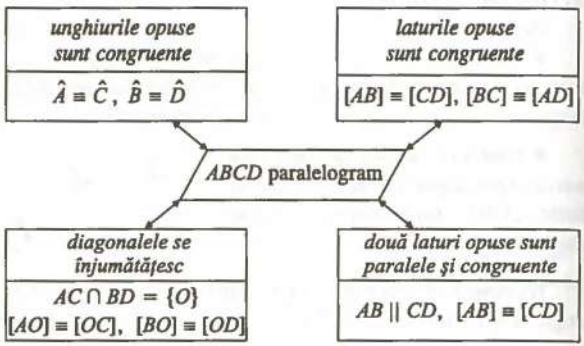
***Definiție:*** Patrulaterul convex cu laturile opuse paralele se numește **paralelogram**.

$ABCD$ paralelogram $\Leftrightarrow \begin{cases} AB \parallel CD \\ AD \parallel BC \end{cases}$.



## 2.2. Proprietățile paralelogramului

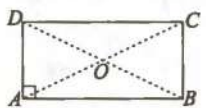
Condiții necesare și suficiente ca un patrulater convex să fie paralelogram:




## 2.3. Paralelograme particulare

### Dreptunghiul

***Definiție:*** Paralelogramul care are un unghi drept se numește **dreptunghi**.




$ABCD$ dreptunghi $\Leftrightarrow$

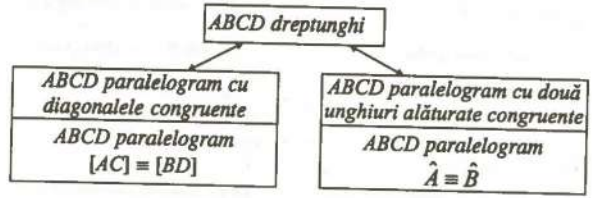
$$\Leftrightarrow \begin{cases} ABCD \text{ paralelogram} \\ m(\hat{A}) = 90^\circ \end{cases}.$$





**Proprietățile dreptunghiului**

Condiții necesare și suficiente ca un paralelogram să fie dreptunghi:




**Atenție!**

- Dreptunghiul are toate unghiurile congruente.

  Din $\hat{A} \equiv \hat{B} \equiv \hat{C} \equiv \hat{D}$ rezultă

  $m(\hat{A}) = m(\hat{B}) = m(\hat{C}) = m(\hat{D}) = 90^\circ$.

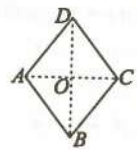
- Dreptunghiul este un caz particular de paralelogram, deci are toate proprietățile acestuia.

### Rombul

***Definiție:*** Paralelogramul care are două laturi alăturate congruente se numește **romb**.

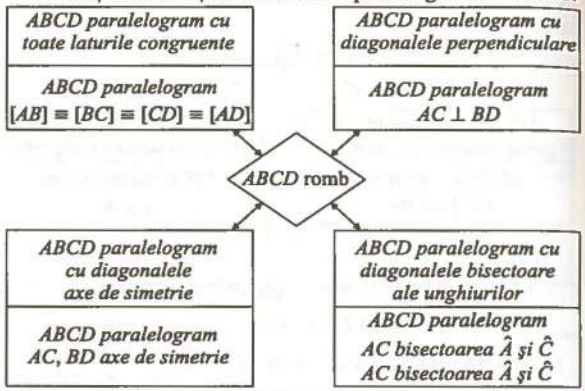
$ABCD$ romb $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} ABCD \text{ paralelogram} \\ [AB] \equiv [BC] \end{cases}.$$



**Proprietățile rombului**

Condiții necesare și suficiente ca un paralelogram să fie romb:

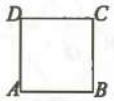



**Atenție!**

Rombul este un caz particular de paralelogram, deci are toate proprietățile acestuia.

## Pătratul

***Definiție:*** Patrulaterul care este și dreptunghi și romb se numește **pătrat**.




$$ABCD \text{ pătrat} \Leftrightarrow \begin{cases} ABCD \text{ paralelogram} \\ m(\hat{A}) = 90^\circ \\ [AB] \equiv [BC] \end{cases}.$$

**Atenție!**

Toate proprietățile de la paralelogram, dreptunghi și romb se regăsesc la pătrat.





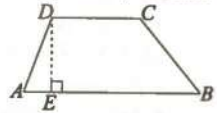
# 3. Trapezul

## 3.1. Noțiuni generale

***Definiții:***

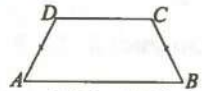
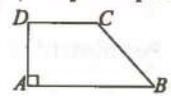
♦ Patrulaterul convex care are două laturi paralele și celelalte două neparalele se numește **trapez**.

$$\left.\begin{matrix} AB \parallel CD \\ AD \not\parallel CB \end{matrix}\right\} \Rightarrow ABCD \text{ trapez}$$




♦ Laturile paralele ale trapezului se numesc **baze**.

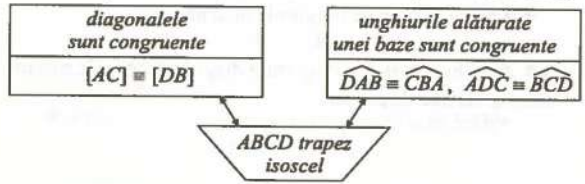
♦ Distanța dintre bazele trapezului este **înălțimea trapezului**.

| Trapez isoscel | Trapez dreptunghic |
|---|---|
| Dacă laturile neparalele ale unui trapez sunt congruente, acesta se numește **trapez isoscel**. | Dacă una dintre laturile neparalele ale unui trapez este perpendiculară pe baze, acesta se numește **trapez dreptunghic**. |
|  |  |
| $[AD] \equiv [CB]$ | $AD \perp AB$ |



## 3.2. Proprietățile trapezului isoscel

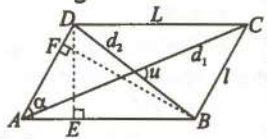
Condiții necesare și suficiente ca un trapez să fie isoscel:



# 4. Perimetrul și aria patrulaterelor studiate

## 4.1. Perimetrul și aria paralelogramului

$AB = DC = L$
$BC = AD = l$
$AC = d_1$, $BD = d_2$
$ED = h_L$, $BF = h_l$




♦ **Perimetrul:** $P = 2(L + l)$.

♦ **Aria** în funcție de lungimea unei laturi și de înălțimea corespunzătoare ei: $A = L \cdot h_L = l \cdot h_l$.

♦ **Aria** în funcție de lungimile laturilor și de măsura unghiului format de acestea (unghi ascuțit):

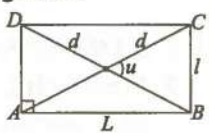
$$A = L \cdot l \cdot \sin\alpha .$$

♦ **Aria** în funcție de lungimile diagonalelor și de măsura unghiului format de acestea:

$$A = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} \cdot \sin u .$$

## 4.2. Perimetrul și aria dreptunghiului

$AB = DC = L$
$BC = AD = l$
$AC = d$, $BD = d$




♦ **Perimetrul:** $P = 2(L + l)$

♦ **Aria** în funcție de lungimile laturilor:

$$A = L \cdot l .$$

♦ **Aria** în funcție de lungimile diagonalelor și de măsura unghiului format de acestea:

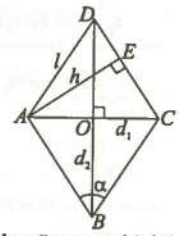
$$A = \frac{d^2}{2} \cdot \sin u .$$





## 4.3. Perimetrul și aria rombului

$AB = BC = CD = DA = l$
$AC = d_1$, $BD = d_2$
$AE = h$.




♦ **Perimetrul:** $P = 4l$

♦ **Aria** în funcție de lungimea unei laturi și de înălțimea corespunzătoare ei:

$$A = l \cdot h .$$

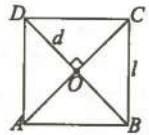
♦ **Aria** în funcție de lungimile laturilor și de măsura unghiului (ascuțit) format de acestea $A = l^2 \cdot \sin\alpha$.

♦ **Aria** în funcție de lungimile diagonalelor

$$A = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} .$$

## 4.4. Perimetrul și aria pătratului

$AB = BC = CD = DA = l$; $AC = BD = d$.




♦ **Perimetrul:** $P = 4l$.

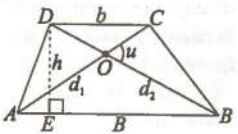
♦ **Aria** în funcție de lungimea laturii:

$$A = l^2 .$$

♦ **Aria** în funcție de lungimea diagonalei: $A = \frac{d^2}{2}$.

## 4.5. Perimetrul și aria trapezului

$AB = B$; $CD = b$; $DE = h$;
$AC = d_1$, $BD = d_2$




♦ **Perimetrul:**

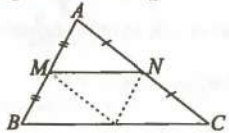
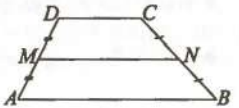
$P = AB + BC + CD + AD$.

♦ **Aria** în funcție de lungimile bazelor și de înălțime:

$$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2} .$$

Capitolul IV

# Linia mijlocie în triunghi și trapez

| În triunghi | În trapez |
|---|---|
| Segmentul care unește mijloacele a două laturi ale unui triunghi se numește **linie mijlocie în triunghi**. | Segmentul care unește mijloacele laturilor neparalele ale unui trapez se numește ***linie* mijlocie în trapez**. |
|  |  |
| $\left.\begin{array}{l}[AM]\equiv[MB]\\ [AN]\equiv[NC]\end{array}\right\}\Rightarrow [MN]$ linie mijlocie în triunghi. | $\left.\begin{array}{l}[AM]\equiv[MD]\\ [BN]\equiv[NC]\end{array}\right\}\Rightarrow [MN]$ linie mijlocie în trapez. |
| ***Teorema liniei mijlocii în triunghi*** | ***Teorema liniei mijlocii în trapez*** |
| În orice triunghi, linia mijlocie determinată de două laturi este paralelă cu a treia latură și are lungimea egală cu jumătate din lungimea acesteia. | În orice trapez, linia mijlocie a acestuia este paralelă cu bazele și are lungimea egală cu semisuma lungimilor bazelor. |
| ***Ipoteză:*** $[MN]$ linie mijlocie în $\Delta ABC$, $M\in[AB]$, $N\in[AC]$. | ***Ipoteză:*** $[MN]$ linie mijlocie în trapezul $ABCD$, $M\in[AD]$, $N\in[BC]$. |
| ***Concluzie:*** $MN \parallel BC$ și $MN=\frac{BC}{2}$. | ***Concluzie:*** $CD \parallel MN \parallel AB$ și $MN=\frac{AB+DC}{2}$. |





| Consecință | Consecință |
|---|---|
| Dacă o dreaptă trece prin mijlocul unei laturi a triunghiului și este paralelă cu altă latură a acestuia, atunci ea trece prin mijlocul celei de-a treia laturi. | Dacă o dreaptă trece prin mijlocul unei laturi neparalele a unui trapez și este paralelă cu bazele acestuia, atunci ea trece și prin mijlocul celei de-a doua laturi neparalele. |
| ***Ipoteză:*** În $\Delta ABC$, $M\in[AB]$, $N\in[AC]$, $[AM]\equiv[MB]$, $MN \parallel BC$. | ***Ipoteză:*** $ABCD$ trapez, $M\in[AD]$, $N\in[BC]$, $[AM]\equiv[MD]$, $MN \parallel AB$. |
| ***Concluzie:*** $[AN]\equiv[NC]$. | ***Concluzie:*** $[CN]\equiv[NB]$. |

Capitolul V

# Cercul

## 1. Noţiuni generale

***Definiţie:*** Mulţimea tuturor punctelor din plan situate la aceeaşi distanţă faţă de un punt fix se numeşte **cerc**.

***Elementele cercului:***

• *centrul cercului* — punctul fix;

• *raza cercului* — distanţa de la centru cercului la orice punct de pe cerc;

• *coardă* — segmentul determinat de orice două puncte distincte de pe cerc;

• *diametru* — orice coardă care trece prin centrul cercului (diametrul este coarda cu cea mai mare lungime);

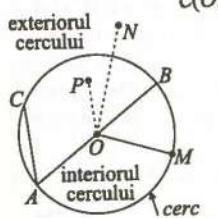
• *arc de cerc* — porţiunea dintr-un cerc cuprinsă între două puncte distincte ale acestuia;

• *semicerc* — porţiunea de cerc determinată de diametru;

• *puncte diametral opuse* — două puncte de pe cerc care sunt şi capetele unui diametru.

Notaţia $\mathcal{C}(O, r)$ reprezintă cercul cu centrul $O$ şi de rază $r$:

$$\mathcal{C}(O, r) = \{M \mid OM = r\}$$




$O$ — centrul cercului

$OA$, $OB$, $OM$ — raze

$OA = OB = OM = r$

$AB$ — diametru, $AB = 2r$

$AC$ — coardă

$\overset{\frown}{AC}$ — arc mic de cerc

$\overset{\frown}{AMC}$ — arc mare de cerc





• *interiorul cercului* — mulţimea punctelor din plan cu proprietatea că distanţa de la centrul cercului la ele este mai mică decât raza cercului.

$$\text{Int}\mathcal{C}(O, r) = \{P \mid OP < r\}$$

• *discul* — reuniunea dintre un cerc şi interiorul său.

$$\mathcal{D}(O, r) = \mathcal{C}(O, r) \cup \text{Int}\mathcal{C}(O, r)$$

• *exteriorul cercului* — mulţimea punctelor din plan cu proprietatea că distanţa de la centrul cercului la ele este mai mare decât raza cercului

$$\text{Ext}\mathcal{C}(O, r) = \{N \mid ON > r\}$$

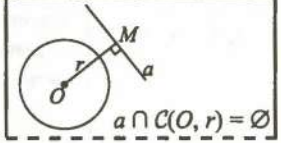
Cercul se poate caracteriza şi ca un loc geometric: *Locul geometric* al punctelor din plan situate la aceeaşi distanţă faţă de un punct fix este un ***cerc***.

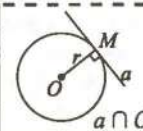
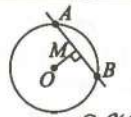
## 2. Poziţii relative ale unei drepte faţă de un cerc

Fie $\mathcal{C}(O, r)$ şi $a$ o dreaptă.

*Distanţa de la centrul cercului la dreaptă* = lungimea perpendicularei coborâte din centrul cercului pe dreaptă.

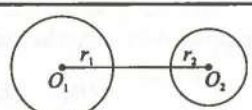
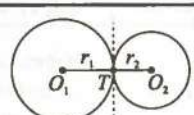
$$\left.\begin{matrix} OM \perp a \\ M \in a \end{matrix}\right\} \Rightarrow OM = \text{distanţa de la } O \text{ la dreapta } a.$$

| Condiţie | Poziţie relativă | Reprezentare |
|---|---|---|
| $OM > r$ | Dreapta $a$ este ***exterioară*** cercului |   $a \cap \mathcal{C}(O, r) = \varnothing$ |

| | | |
|---|---|---|
| $OM = r$ | Dreapta $a$ este ***tangentă*** cercului |  $a \cap C(O, r) = \{M\}$ |
| $OM < r$ | Dreapta $a$ este ***secantă*** la cerc |  $a \cap C(O, r) = \{A, B\}$ |

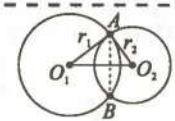
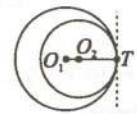
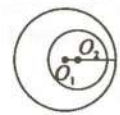
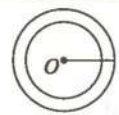
## 3. Poziții relative a două cercuri

Fie $C_1(O_1, r_1)$ și $C_2(O_2, r_2)$ două cercuri cu $r_1 \neq r_2$.

| Condiție | Poziție relativă | Reprezentare |
|---|---|---|
| $O_1O_2 > r_1 + r_2$ | cercuri ***exterioare*** |  $C_1(O_1, r_1) \cap C_2(O_2, r_2) = \varnothing$ |
| $O_1O_2 = r_1 + r_2$ | cercuri ***tangente exterioare*** |  $C_1(O_1, r_1) \cap C_2(O_2, r_2) = \{T\}$ |



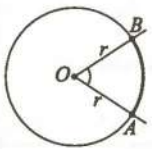


| | | |
|---|---|---|
| $\lvert r_1 - r_2 \rvert < O_1O_2 < r_1 + r_2$ | cercuri ***secante*** |  $[AB]$ – coardă comună<br>$AB \perp O_1O_2$<br>$C_1(O_1, r_1) \cap C_2(O_2, r_2) = \{A, B\}$ |
| $O_1O_2 = r_1 - r_2$ | cercuri ***tangente interioare*** |  $C_1(O_1, r_1) \cap C_2(O_2, r_2) = \{T\}$ |
| $O_1O_2 < \lvert r_1 - r_2 \rvert$ | cercuri ***interioare*** |  $C_1(O_1, r_1) \cap C_2(O_2, r_2) = \varnothing$ |
| $O_1O_2 = O$ | cercuri ***concentrice*** |  |

## 4. Unghiuri construite relativ la cerc

### 4.1. Unghi la centru

***Definiții:***




♦ **Unghiul la centru** este unghiul cu vârful în centrul cercului, laturile sale fiind raze ale acestuia.

♦ **Măsura unui unghi la centru** este egală cu măsura arcului mic de cerc determinat de laturile unghiului.

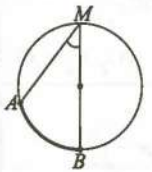
$$m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{AB})$$

### 4.2. Unghi înscris în cerc

***Definiții:***

♦ **Unghiul înscris în cerc** este unghiul cu vârful pe un cerc, laturile sale fiind coarde în cercul respectiv.

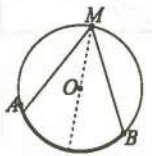
♦ **Măsura unui unghi înscris în cerc** este jumătate din măsura arcului de cerc curpins între laturile sale.




*Există mai multe situații:*

• Dacă una dintre laturi trece prin centrul cercului, atunci:

$$m(\widehat{AMB}) = \frac{m(\widehat{AB})}{2}$$



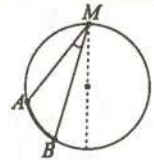

• Dacă centrul cercului este interior unghiului, atunci:

$$m(\widehat{AMB}) = \frac{m(\widehat{AB})}{2}$$





• Dacă centrul cercului este exterior unghiului, atunci:



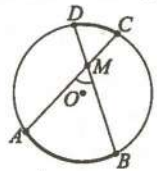

$$m(\widehat{AMB}) = \frac{m(\widehat{AB})}{2}$$

### 4.3. Unghi cu vârful în interiorul cercului

***Definiții:***

♦ **Unghiul cu vârful în interiorul cercului** este unghiul determinat de două coarde ale unui cerc, coarde care se intersectează în interiorul acestuia. Vârful unghiului va fi punctul de intersecție al coardelor.

♦ **Măsura unui unghi cu vârful în interiorul unui cerc** este egală cu semisuma măsurilor arcelor cuprinse între laturile unghiului și prelungirile acestora.




$$m(\widehat{AMB}) = \frac{m(\widehat{AB}) + m(\widehat{CD})}{2}$$

$AC \cap BD = \{M\}$

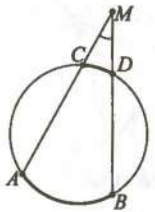
$M \in \text{Int}\mathcal{C}(O, r)$

### 4.4. Unghi cu vârful în exteriorul unui cerc

***Definiții:***

♦ **Unghiul cu vârful în exteriorul unui cerc** este unghiul determinat de două coarde ale unui cerc, coarde care se intersectează în exteriorul acestuia; vârful unghiului va fi punctul de intersecție al coardelor.

♦ **Măsura unui unghi cu vârful în exteriorul unui cerc** este egală cu semidiferența măsurilor acelor cuprinse între laturile unghiului.




$$m(\widehat{AMB}) = \frac{m(\widehat{AB}) - m(\widehat{CD})}{2}$$

$AC \cap BD = \{M\}$

$M \in \text{Ext}\mathcal{C}(O, r)$

## 4.5. Unghi cu vârful pe cerc

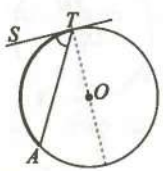
***Definiții:***

♦ **Unghiul cu vârful pe cerc** este unghiul format de o secantă și de o tangentă la un cerc.

♦ **Măsura unui unghi cu vârful pe cerc** este egală cu jumătate din măsura arcului cuprins între laturile sale.

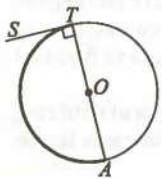
Fie $[AT]$ o secantă la cerc și $[ST]$ tangenta la cerc în $T$.

*Există mai multe situații:*




• Dacă unghiul este ascuțit, atunci:

$$m(\widehat{ATS}) = \frac{m(\widehat{AT})}{2} < 90°.$$

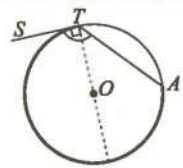



• Dacă unghiul este drept, atunci:

$$m(\widehat{ATS}) = \frac{m(\widehat{AT})}{2} = 90°.$$





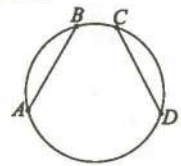



• Dacă unghiul este obtuz, atunci:

$$m(\widehat{ATS}) = \frac{m(\widehat{AT})}{2} > 90°.$$

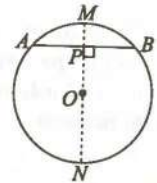
## 5. Teoreme referitoare la arce și coarde

**Cercuri congruente** = cercuri având raze egale
**Coarde congruente** = coarde având aceeași lungime
**Arce congruente** = arce de cerc determinate de coarde congruente




**T1.** În același cerc, sau în cercuri congruente, la arce congruente corespund coarde congruente și, reciproc, la coarde congruente corespund arce congruente.

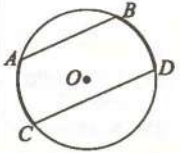
$$\widehat{AB} \equiv \widehat{CD} \Leftrightarrow [AB] \equiv [CD].$$




**T2.** Diametrul perpendicular pe o coardă împarte coarda și arcele (mic și mare) determinate de ea în părți congruente.

***Ipoteză:*** $[AB]$ – coardă; $[MN]$ – diametru; $MN \perp AB$; $MN \cap AB = \{P\}$.

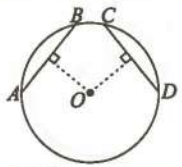
***Concluzie:*** $[AP] \equiv [PB]$; $\widehat{AM} \equiv \widehat{MB}$; $\widehat{AN} \equiv \widehat{NB}$.




**T3.** Arcele cuprinse între două coarde paralele sunt congruente.

***Ipoteză:*** $[AB], [CD]$ – coarde; $AB \parallel CD$.

***Concluzie:*** $\widehat{AC} \equiv \widehat{BD}$.

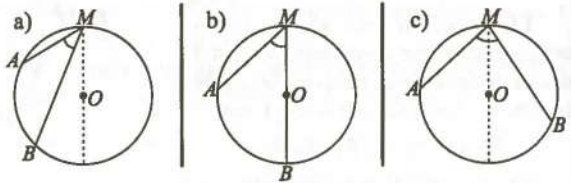



**T4.** Coardele egal depărtate de centru sunt congruente și, reciproc, coardele congruente sunt egal depărtate de centru. $d(O, AB) = d(O, CD) \Leftrightarrow [AB] \equiv [CD]$ unde $d(O, AB) = \text{dist}(O, AB)$.

## 6. Figuri geometrice înscrise în cerc

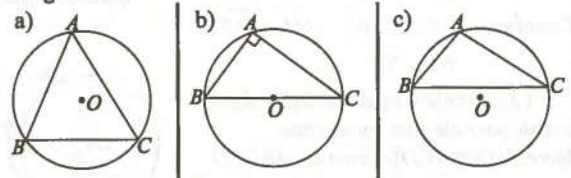
### 6.1. Unghi înscris în cerc

***Definiție:*** **Unghiul înscris în cerc** este unghiul având vârful pe un cerc dat $\mathcal{C}(O, r)$, iar laturile coarde în același cerc.




### 6.2. Triunghi înscris în cerc

***Definiție:*** **Triunghiul înscris în cerc** este triunghiul având toate vârfurile pe un cerc dat, numit **cercul circumscris triunghiului**.




$\Delta ABC$ ascuțitunghic | $\Delta ABC$ dreptunghic | $\Delta ABC$ obtuzunghic





**Atenție!**

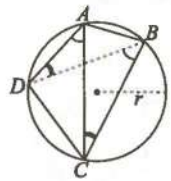
Orice tip de triunghi poate fi înscris într-un cerc.

### 6.3. Patrulater înscris în cerc

***Definiție:*** **Patrulaterul înscris în cerc** este patrulaterul având toate vârfurile pe un cerc dat, numit **cercul circumscris patrulaterului**.

**Atenție!**

Un patrulater nu poate fi înscris întotdeauna într-un cerc, ci doar atunci când este convex.




Orice patrulater convex care poate fi înscris într-un cerc se numește **patrulater inscriptibil**.

Condiții necesare și suficiente ca un patrulater convex să fie inscriptibil:

**1.** Un patrulater convex este inscriptibil dacă și numai dacă două unghiuri opuse sunt suplementare.

$ABCD$ inscriptibil $\Leftrightarrow m(\hat{A}) + m(\hat{C}) = 180°$

*sau* $m(\hat{B}) + m(\hat{D}) = 180°$

**2.** Un patrulater convex este inscriptibil dacă și numai dacă unghiurile formate de diagonale cu două laturi opuse sunt congruente.

$ABCD$ inscriptibil $\Leftrightarrow \widehat{DAC} \equiv \widehat{CBD}$ *sau* $\widehat{BCA} \equiv \widehat{ADB}$.

**Atenție!**

Dintre patrulaterele studiate (paralelogram, dreptunghi, romb, pătrat, trapez) sunt inscriptibile doar: *pătratul*, *dreptunghiul* și *trapezul isoscel*.

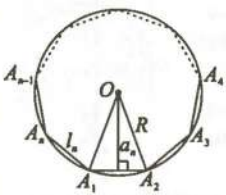
# 7. Poligoane regulate

## 7.1. Noțiuni generale

***Definiție:*** Un poligon convex care are toate laturile și toate unghiurile congruente se numește **poligon regulat**.

**Atenție!**

*Orice poligon regulat se poate înscrie într-un cerc.* Acest cerc este numit *cercul circumscris poligonului* respectiv.




Un poligon regulat $A_1A_2...A_n$ având $n$ laturi și înscris în cercul $C(O,r)$ are următoarele **elemente**:

• *latura*, cu lungimea

$$l_n = 2R\sin\frac{180°}{n};$$

• *apotema* — perpendiculara din centrul poligonului pe una dintre laturile acestuia; cu lungimea

$$a_n = R\cdot\cos\frac{180°}{n};$$

• *unghiul la centru corespunzător fiecărei laturi*, cu măsura de $\frac{360°}{n}$.

## 7.2. Perimetrul și aria unui poligon regulat

Perimetrul și aria unui poligon regulat se pot calcula astfel:

♦ **Perimetrul** poligonului regulat $A_1A_2...A_n$ este:

$$P_{A_1A_2...A_n} = n\cdot l_n = n\cdot 2R\sin\frac{180°}{n}.$$

♦ **Aria** poligonului regulat $A_1A_2...A_n$ este:

$$A_{A_1A_2...A_n} = n\cdot A_{\Delta A_1OA_2} = n\cdot\frac{l_n\cdot a_n}{2} = n\cdot R^2\sin\frac{180°}{n}\cdot\cos\frac{180°}{n}.$$





## 7.3. Cazuri particulare de poligoane regulate înscrise în cerc

| | Triunghi echilateral | Pătrat | Hexagon regulat |
|---|---|---|---|
| **Latura** | $l_3 = R\sqrt{3}$ | $l_4 = R\sqrt{2}$ | $l_6 = R$ |
| **Apotema** | $a_3 = \frac{R}{2}$ | $a_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$ | $a_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$ |
| **Perimetrul** | $P_3 = 3l_3 = 3R\sqrt{3}$ | $P_4 = 4l_4 = 4R\sqrt{2}$ | $P_6 = 6l_6 = 6R$ |
| **Aria** | $A_3 = 3R^2\frac{\sqrt{3}}{4}$ | $A_4 = 2R^2$ | $A_6 = 3R^2\frac{\sqrt{3}}{2}$ |

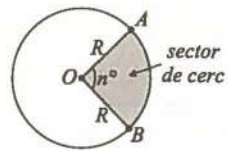
**Atenție!**

• Dreptunghiul nu este poligon regulat deoarece nu are toate laturile egale.

• Rombul nu este poligon regulat deoarece nu are toate unghiurile congruente.

# 8. Lungimi și arii întâlnite în cerc

Fie $C(O,r)$ un cerc de centru $O$ și rază $r$.




♦ **Lungimea cercului** este

$$L_{cerc} = 2\pi R,$$

unde $\pi \approx 3{,}14$.

♦ **Lungimea arcului de cerc** corespunzător unui unghi la centru de $n°$ este:

$$L_{arc\,cerc} = \frac{2\pi R\cdot n°}{360°} = \frac{\pi R n°}{180°}.$$

♦ **Discul de rază $R$** este mulțimea punctelor din plan mărginită de cercul de rază $R$ și are **aria**:

$$A_{disc} = \pi R^2.$$

♦ **Sectorul de cerc** este porțiunea din interiorul unui cerc cuprinsă între două raze ale cercului; când sectorului de cerc îi corespunde un arc de cerc cu măsura de $n^\circ$ are **aria**:

$$A_{sector} = \frac{\pi R^2 \cdot n^\circ}{360^\circ}.$$

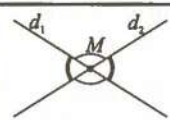


Capitolul VI

# Unghiul a două drepte în plan și spațiu

## 1. În plan

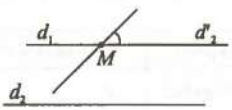
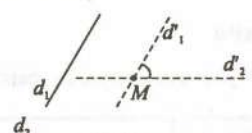
Fie $d_1$ și $d_2$ două drepte în plan.

| Poziția dreptelor | Reprezentare | Unghi |
|---|---|---|
| drepte confundate $d_1 = d_2$ | $d_1$ / $d_2$ | unghi nul |
| drepte paralele $d_1 \parallel d_2$ | $d_1$ / $d_2$ | nu formează unghi |
| drepte concurente $d_1 \cap d_2 = \{M\}$ |   | 4 unghiuri, 2 câte 2 opuse la vârf |

## 2. În spațiu

Fie $d_1$ și $d_2$ două drepte în spațiu.

| Poziția dreptelor | Reprezentare și construcții |
|---|---|
| $d_1$ și $d_2$ coplanare | se regăsesc cele trei situații din plan |

| | |
|---|---|
| $d_1$ și $d_2$ necoplanare | • Printr-un punct al dreptei $d_1$ se construiește o paralelă la dreapta $d_2$; unghiul format de această paralelă cu $d_1$ este unghiul cerut.<br>$\left.\begin{array}{l} M \in d_1,\ M \notin d_2 \\ d_2' \parallel d_2,\ M \in d_2' \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{m}(\widehat{d_1, d_2}) = \mathrm{m}(\widehat{d_1, d_2'})$<br>  <br>• Printr-un punct nesituat pe nici una dintre drepte se construiesc paralele la dreptele date; unghiul format de cele două paralele este unghiul cerut.<br>$\left.\begin{array}{l} M \notin d_1,\ M \notin d_2 \\ d_1' \parallel d_1,\ M \in d_1' \\ d_2' \parallel d_2,\ M \in d_2' \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{m}(\widehat{d_1, d_2}) = \mathrm{m}(\widehat{d_1', d_2'})$<br>  |

**Atenție!**

Dacă $\mathrm{m}(\widehat{d_1, d_2}) = 90°$, atunci spunem că dreptele sunt perpendiculare. Scriem $d_1 \perp d_2$.



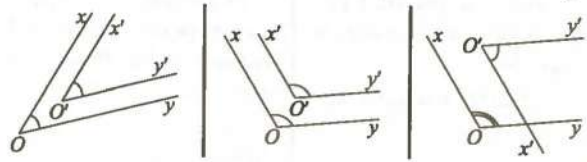


*Observație:* **Două unghiuri cu laturile respectiv paralele** (în plan sau în spațiu) sunt:

– congruente (dacă ambele sunt ascuțite sau ambele sunt obtuze);

*sau*

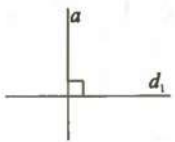
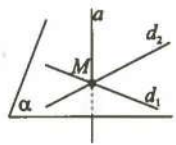
– suplementare (dacă unul este ascuțit, iar celălalt obtuz).



Capitolul VII

# Perpendicularitate în plan și spațiu

## 1. Noțiuni generale

| În plan | În spațiu |
|---|---|
| **Două drepte sunt perpendiculare** dacă formează un unghi drept.<br>$a \perp d_1$ dacă $m(\widehat{a, d_1}) = 90^\circ$<br>  | **O dreaptă este perpendiculară pe un plan** dacă este perpendiculară pe două drepte concurente din acel plan.<br>$\left.\begin{array}{l} d_1, d_2 \subset \alpha \\ d_1 \cap d_2 = \{M\} \\ a \perp d_1 \\ a \perp d_2 \end{array}\right\} \Rightarrow a \perp \alpha$<br>  |

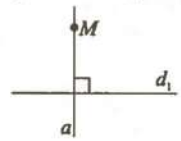
## 2. Teoreme relative la perpendicularitate

| În plan | În spațiu |
|---|---|
| ***Teoremă:*** Dintr-un punct exterior unei drepte se poate duce o singură perpendiculară pe acea dreaptă. | ***Teoremă:*** Dintr-un punct exterior unui plan se poate duce o singură perpendiculară pe acel plan. |

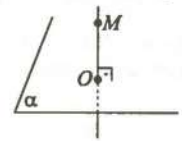




$M \notin d_1 \Rightarrow \exists!\, a \perp d_1 \ (M \in a)$




$M \notin \alpha \Rightarrow \exists!\, MO \perp \alpha \ (O \in \alpha)$




**Atenție!**

Dacă o dreaptă este perpendiculară pe un plan, atunci ea este perpendiculară pe orice dreaptă conținută în acel plan.

## 3. Proiecții de puncte, segmente și drepte

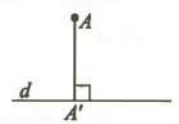
### 3.1. Proiecții de puncte

***Definiții:***

♦ **Proiecția ortogonală a unui punct pe o dreaptă** este piciorul perpendicularei duse din acel punct pe dreaptă.

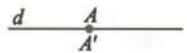
În funcție de locul unde se află punctul în plan (în afara dreptei sau pe dreaptă) există două situații:

$A \notin d$




$A \notin d \Rightarrow \text{pr}_d A = A'$ cu $A' \in d$

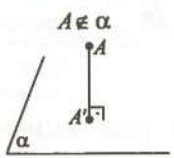
$A \in d$



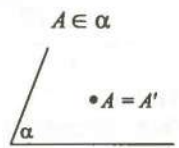

$A \in d \Rightarrow \text{pr}_d A = A'$ cu $A = A' \in d$

♦ *Proiecția ortogonală a unui punct pe un plan* este piciorul perpendicularei duse din acel punct pe plan.

În funcție de locul unde se află punctul în spațiu (în afara planului sau în plan) există două situații:



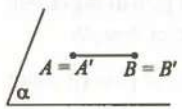

$A \notin \alpha \Rightarrow \text{pr}_\alpha A = A'$ cu $A' \in \alpha$



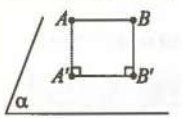

$A \in \alpha \Rightarrow \text{pr}_\alpha A = A'$ cu $A = A' \in \alpha$

## 3.2. Proiecții de segmente

*Proiecția ortogonală a unui segment pe un plan* este un punct sau un segment, în funcție de poziția segmentului față de plan.

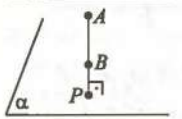



♦ $[AB] \subset \alpha \Rightarrow \text{pr}_\alpha[AB] = [AB]$ (segmentul coincide cu proiecția sa).




♦ $[AB] \not\subset \alpha$

• $[AB] \parallel \alpha \Rightarrow \text{pr}_\alpha[AB] = [A'B']$ cu $[AB] \equiv [A'B']$ și $AB \parallel A'B'$.

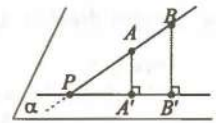



• $[AB] \perp \alpha \Rightarrow \text{pr}_\alpha[AB] = \{P\}$ cu $AB \cap \alpha = \{P\}$.





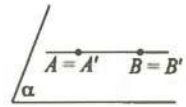
• $[AB] \not\perp \alpha$, $AB \cap \alpha = \{P\} \Rightarrow$ $\Rightarrow \text{pr}_\alpha[AB] = [A'B']$ cu $AB > A'B'$.




## 3.3. Proiecții de drepte

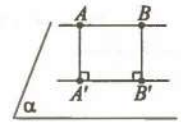
*Proiecția unei drepte pe un plan* este un punct sau o dreaptă, în funcție de poziția dreptei față de plan.

♦ $AB \subset \alpha \Rightarrow \text{pr}_\alpha AB = AB$ (dreapta coincide cu proiecția sa).

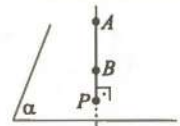



♦ $AB \not\subset \alpha$

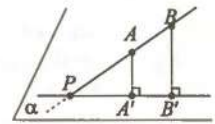
• $AB \parallel \alpha \Rightarrow \text{pr}_\alpha AB = A'B'$ cu $AB \parallel A'B'$.




• $AB \perp \alpha \Rightarrow \text{pr}_\alpha AB = \{P\}$ cu $AB \cap \alpha = \{P\}$.




• $AB \not\perp \alpha$, $AB \cap \alpha = \{P\} \Rightarrow$ $\Rightarrow \text{pr}_\alpha AB = A'B'$.



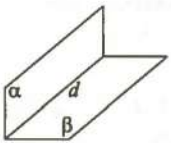

**Atenție!**

Unghiul unei drepte cu un plan este unghiul format de dreaptă cu proiecția ei pe planul considerat.

## 4. Unghi diedru; unghi plan diedru

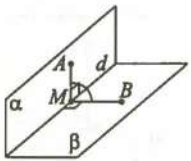
***Definiţii:***

♦ **Unghi diedru** sau **diedru** este figura formată de două semiplane delimitate de aceeaşi dreaptă $d$, semiplane aflate în două plane diferite ce conţin $d$.




***Elementele unghiului diedru:***
- *muchia diedului* — dreapta $d$;
- *feţele diedului* — semiplanele $\alpha$ şi $\beta$.

♦ **Unghi plan diedru** este unghiul format de perpendicularele duse în cele două semiplane, pe muchia diedrului, în acelaşi punct.




$$\left.\begin{array}{l}\alpha\cap\beta=\{d\}\\ M\in d\\ AM\perp d, A\in\alpha\\ BM\perp d, B\in\beta\end{array}\right\}\Rightarrow \widehat{AMB}$$ – unghi plan diedru.

♦ Prin **măsura unghiului a două plane secante** se înţelege numărul unic, egal cu cea mai mică dintre măsurile unghiurilor diedre determinate de planele $\alpha$ şi $\beta$.

*Notaţie:* $m(\widehat{\alpha,\beta})$.





**Atenţie!**

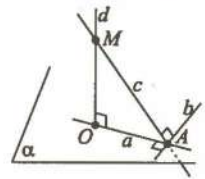
Unghiul planelor $\alpha$ şi $\beta$ este congruent cu unghiul plan al diedrului, dacă acesta nu este obtuz, sau cu suplementul acestuia, în caz contrar:

- dacă $m(\widehat{AMB})\leq 90°$, atunci $m(\widehat{\alpha,\beta})=m(\widehat{AMB})$;
- dacă $m(\widehat{AMB})>90°$, atunci $m(\widehat{\alpha,\beta})=180°-m(\widehat{AMB})$.

## 5. Teorema celor trei perpendiculare

***Teorema celor trei perpendiculare (T3⊥)***

Fie o dreaptă $d$ perpendiculară pe un plan $\alpha$. Prin piciorul ei ducem o dreaptă $a$, conţinută în plan, perpendiculară pe o altă dreaptă $b$, conţinută tot în plan. O dreaptă $c$ care uneşte un punct $M$ aparţinând dreptei $d$ cu punctul $A$ de intersecţie al perpendicularelor din plan este perpendiculară pe dreapta $d$.




***Ipoteză:*** $d\perp\alpha$, $a\perp b$, $a, b\subset\alpha$.
***Concluzie:*** $c\perp b$.

**Atenţie!**

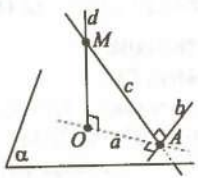
Distanţa de la un punt la o dreaptă este egală cu distanţa dintre punct şi piciorul perpendicularei din punct pe acea dreaptă:

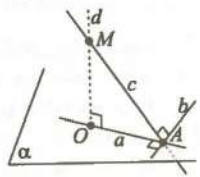
$$d(M,b)\overset{not}{=}dist(M,b)=MA.$$

***Reciprocele teoremei celor trei perpendiculare***

Schimbând oricare dinte cele două propoziţii de perpendicularitate din ipoteza teoremei celor trei perpendiculare cu concluzia teoremei, eventual întărind şi cu alte propoziţii, se obţin reciproce ale acestei teoreme. Doar două dintre acestea sunt şi adevărate.

| Reciproca 1 ($R_1T3\perp$) | Reciproca 2 ($R_2T3\perp$) |
|---|---|
| ***Ipoteză:*** $d \perp \alpha, c \perp b,\ a, b \subset \alpha$. | ***Ipoteză:*** $c \perp b, a \perp b,\ a, b \subset \alpha,\ d \perp a$. |
| ***Concluzie:*** $a \perp b$. | ***Concluzie:*** $d \perp \alpha$. |






Capitolul VIII

# Prisma

## 1. Noțiuni generale

***Definiție:*** **Prisma** este corpul geometric determinat pe două poligoane plane identice, situate în plane paralele, numite **baze** și de o dreaptă neparalelă cu ele, numită **generatoare**. Paralelele duse prin vârfurile corespunzătoare ale bazelor determină **muchiile prismei**.

Prisma se numește după poligonul de bază: *prismă triunghiulară, patrulateră, hexagonală* etc.

## 2. Prisma dreaptă

***Definiții:***

♦ **Prisma dreaptă** este prisma cu muchiile laterale perpendiculare pe planele bazelor.

♦ Figurile geometrice congruente aflate în planele paralele sunt **bazele prismei.**

♦ Orice muchie laterală poate fi considerată **înălțime a prismei.**

**Atenție!**

Fețele laterale ale unei prisme sunt dreptunghiuri.

### 2.1. Aria și volumul prismei drepte

Pentru orice prismă dreaptă avem că:

♦ **Aria laterală** este $A_l = P_b \cdot h$.

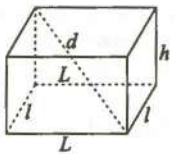
♦ **Aria totală** este $A_t = A_l + 2A_b$.

♦ **Volumul** este $V = A_b \cdot h$.

unde $P_b$ — perimetrul bazei;
$h$ — înălțimea prismei;
$A_b$ — aria bazei.

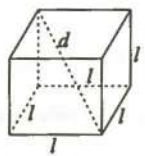
## 2.2. Cazuri particulare de prisme drepte

♦ **Paralelipiped dreptunghic** — prisma dreaptă cu baza dreptunghi.




$A_l = 2(Lh + lh)$
$A_t = 2(Lh + lh + Ll)$
$V = L \cdot l \cdot h$
diagonala $d = \sqrt{L^2 + l^2 + h^2}$

♦ **Cubul** – prisma dreaptă cu toate fețele pătrate.

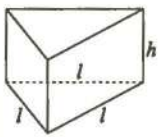



$A_l = 4l^2$
$A_t = 6l^2$
$V = l^3$
$d = l\sqrt{3}$

## 2.3. Cazuri particulare de prisme regulate

***Definiție:*** **Prisma regulată** este prisma dreaptă cu baza poligon regulat.

♦ **Prisma triunghiulară regulată** — prisma dreaptă cu baza triunghi echilateral.

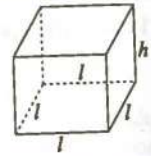



$A_l = 3lh$
$A_t = 3lh + \frac{l^2\sqrt{3}}{2}$
$V = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \cdot h$



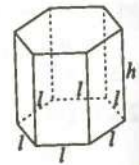


♦ **Prisma patrulateră regulată** — prisma dreaptă cu baza pătrat.




$A_l = 4lh$
$A_t = 4lh + 2l^2$
$V = l^2 \cdot h$

♦ **Prisma hexagonală regulată** — prisma dreaptă cu baza hexagon regulat.




$A_l = 6lh$
$A_t = 6lh + 3l^2\sqrt{3}$
$V = 3\frac{l^2\sqrt{3}}{2} \cdot h$

Capitolul IX

# Piramida

## 1. Noţiuni generale

***Definiţie:***

♦ **Piramida** este corpul geometric determinat de un poligon plan, numit **bază**, şi de un punct care nu se află în planul acestuia, numit **vârf**.

Piramida se denumeşte după poligonul de bază: *piramidă triunghiulară, patrulateră, hexagonală* etc.

♦ **Înălţimea unei piramide** este perpendiculara coborâtă din vârful piramidei pe bază.

## 2. Piramida regulată

***Definiţie:***

♦ **Piramida regulată** este piramida cu baza poligon regulat şi pentru care piciorul înălţimii piramidei coincide cu centrul poligonului de bază.

♦ **Apotema piramidei regulate** este înălţimea corespunzătoare muchiei bazei dusă în orice faţă laterală.

**Atenţie!**

- Toate muchiile laterale ale unei piramide regulate sunt egale.
- Feţele laterale sunt triunghiuri isoscele, congruente.

### 2.1. Aria şi volumul piramidei regulate

Pentru orice piramidă regulată avem că:

♦ **Aria laterală** este $A_l = \frac{P_b \cdot a_p}{2}$.

♦ **Aria totală** este $A_t = A_l + A_b$.





♦ **Volumul** este $V = \frac{A_b \cdot h}{3}$

unde $P_b$ — perimetrul bazei;
$a_p$ — apotema piramidei;
$A_b$ — aria bazei;
$h$ — înălţimea piramidei.

### 2.2. Cazuri particulare de piramide regulate

♦ **Piramida triunghiulară regulată** — piramida regulată cu baza triunghi echilateral.

$m^2 = h^2 + R^2$, $m$ — muchia bazei

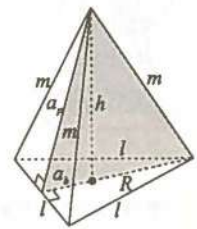
$a_p^2 = h^2 + a_b^2$, $a_b$ — apotema bazei

$a_b = \frac{1}{3} \cdot \frac{l\sqrt{3}}{2}$, $l$ – latura bazei

$A_l = \frac{3l \cdot a_p}{2}$

$A_t = \frac{3l \cdot a_p}{2} + \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$

$V = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \cdot h \cdot \frac{1}{3} = \frac{l^2 h\sqrt{3}}{12}$



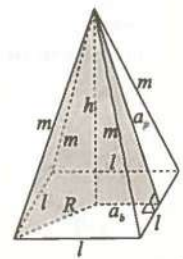

♦ **Piramida patrulateră regulată** – piramida regulată cu baza pătrat.

$m^2 = h^2 + R^2$, $m$ — muchia laterală

$a_p^2 = h^2 + a_b^2$, $a_b$ — apotema bazei

$a_b = \frac{l}{2}$, $l$ — latura bazei

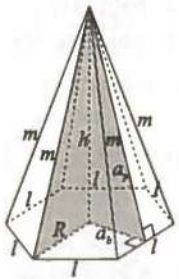
$A_l = \frac{4l \cdot a_p}{2}$



$$A_l = \frac{4l \cdot a_p}{2} + l^2$$

$$V = \frac{l^2 h}{3}$$

♦ **Piramida hexagonală regulată** — piramida regulată cu baza hexagon regulat.




$m^2 = h^2 + R^2$, $m$ — muchia laterală

$a_p^2 = h^2 + a_b^2$, $a_b$ — apotema bazei

$a_b = \frac{l\sqrt{3}}{2}$, $l$ — latura bazei

$$A_l = \frac{6l \cdot a_p}{2}$$

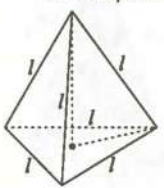
$$A_t = \frac{6l \cdot a_p}{2} + \frac{3l^2\sqrt{3}}{2}$$

$$V = \frac{3l^2\sqrt{3}}{2} \cdot h \cdot \frac{1}{3} = \frac{l^2 \cdot h\sqrt{3}}{2}$$

♦ **Tetraedrul regulat** — piramida triunghiulară regulată cu toate muchiile congruente.

**Atenție!**

Toate fețele sunt triunghiuri echilaterale.




$$A_l = 3 \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

$$A_t = l^2\sqrt{3}$$

$$V = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{l\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{l^3\sqrt{2}}{12}$$



Capitolul X

# Trunchiul de piramidă regulată

***Definiții:***

♦ **Trunchiul de piramidă regulată** este corpul provenit din secționarea unei piramide regulate cu un plan paralel cu baza și îndepărtarea părții superioare.

♦ **Înălțimea trunchiului** este distanța dintre cele două baze.

♦ **Apotema trunchiului de piramidă regulată** este înălțimea unei fețe laterale.

**Atenție!**

- Fețele laterale sunt trapeze isoscele congruente.
- Muchiile laterale sunt congruente.
- Bazele sunt figuri geometrice asemenea.

## 1. Aria și volumul trunchiului de piramidă regulată

Pentru orice trunchi de piramidă regulată avem că:

♦ **Aria laterală** este $A_l = \frac{(P_B + P_b) \cdot a_t}{2}$.

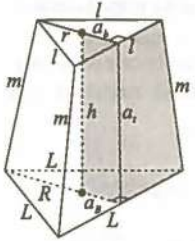
♦ **Aria totală** este $A_t = A_l + A_B + A_b$.

♦ **Volumul** este $V = \frac{h}{3}\left(A_B + A_b + \sqrt{A_B A_b}\right)$.

unde $P_B$ — perimetrul bazei mari;
$P_b$ — perimetrul bazei mici;
$a_t$ — apotema trunchiului;
$A_B$ — aria bazei mari;
$A_b$ — aria bazei mici;
$h$ — înălțimea trunchiului.

## 2. Cazuri particulare de trunchiuri

♦ **Trunchi de piramidă triunghiulară regulată** — trunchiul de piramidă cu bazele triunghiuri echilaterale.




$$a_t^2 = h^2 + (a_B - a_b)^2$$

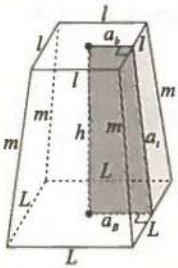
$$m^2 = a_t^2 + \left(\frac{L-l}{2}\right)^2$$

$$A_l = \frac{3(L+l)\cdot a_t}{2}$$

$$A_t = \frac{3(L+l)\cdot a_t}{2} + \frac{L^2\sqrt{3}}{4} + \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

$$V = \frac{h}{3}\cdot\frac{(L^2+l^2+Ll)\sqrt{3}}{4}$$

♦ **Trunchi de piramidă patrulateră regulată** — trunchiul de piramidă cu bazele pătrate.




$$a_t^2 = h^2 + (a_B - a_b)^2$$

$$m^2 = a_t^2 + \left(\frac{L-l}{2}\right)^2$$

$$A_l = \frac{4(L+l)\cdot a_t}{2}$$

$$A_t = \frac{4(L+l)\cdot a_t}{2} + L^2 + l^2$$

$$V = \frac{h}{3}\cdot(L^2+l^2+Ll)$$





♦ **Trunchi de piramidă hexagonală regulată** — trunchiul de piramidă cu bazele hexagoane regulate.

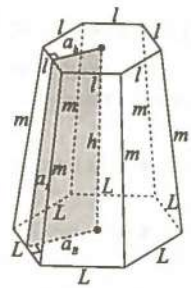
$$a_t^2 = h^2 + (a_B - a_b)^2$$

$$m^2 = a_t^2 + \left(\frac{L-l}{2}\right)^2$$

$$A_l = \frac{6(L+l)\cdot a_t}{2} = 3(L+l)a_t$$

$$A_t = 3(L+l)\cdot a_t + 3\cdot\frac{L^2\sqrt{3}}{2} + 3\cdot\frac{l^2\sqrt{3}}{2}$$

$$V = h\cdot\frac{(L^2+l^2+Ll)\sqrt{3}}{2}$$




BIBLIOTECA JUDEȚEANĂ
GH. ȘINCAI
* - BIHOR - *

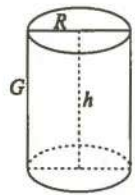
Capitolul XI

# Ariile și volumele corpurilor rotunde

## 1. Cilindrul circular drept

Într-un cilindru circular drept **generatoarea** este egală cu **înălțimea**:

$$G = h.$$




♦ **Aria laterală** este:

$$A_l = P_b \cdot h \Rightarrow A_l = 2\pi RG.$$

♦ **Aria totală** este:

$$A_t = A_l + 2A_b \Rightarrow A_t = 2\pi R(G + R).$$

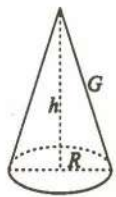
♦ **Volumul** este:

$$V = A_b \cdot h \Rightarrow V = \pi R^2 h.$$

## 2. Conul circular drept

Într-un con circular drept avem:

$$G^2 = h^2 + R^2.$$




♦ **Aria laterală** este:

$$A_l = \pi RG.$$

♦ **Aria totală** este:

$$A_t = A_l + A_b \Rightarrow A_t = \pi R(G + R).$$

♦ **Volumul este:**

$$V = \frac{A_b \cdot h}{3} \Rightarrow V = \frac{\pi R^2 h}{3}.$$

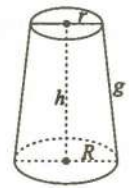




## 3. Trunchiul de con circular drept

Într-un trunchi de con circular drept avem:

$$g^2 = h^2 + (R - r)^2.$$




♦ **Aria laterală** este:

$$A_l = \pi g(R + r)$$

♦ **Aria totală** este:

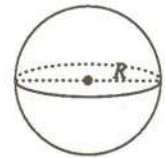
$$A_t = A_l + A_B + A_b \Rightarrow A_t = \pi g(R + r) + \pi R^2 + \pi r^2$$

♦ **Volumul** este:

$$V = \frac{h}{3}\left(A_B + A_b + \sqrt{A_B \cdot A_b}\right) \Rightarrow V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr).$$

## 4. Sfera

Fie o sferă de rază $R$.




♦ **Aria** este:

$$A_{sf} = 4\pi R^2.$$

♦ **Volumul** este:

$$V_{sf} = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

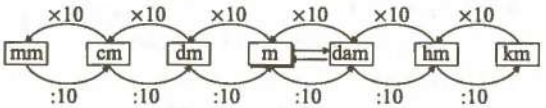
Capitolul XII

# Unități de măsură

## 1. Unități de măsură pentru lungime

Unitatea de măsură, internațional recunoscută, pentru lungime este **metrul**, simbolizat **m**.

*Multiplii* și *submultiplii metrului* sunt:




**Atenție!**

• Săgețile indică sensul de transformare.

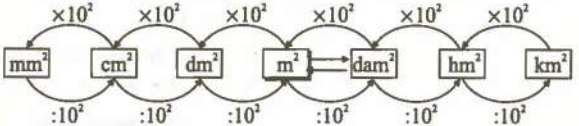
• La transformarea unei unități de măsură mai mici într-una mai mare împărțim la 10, 100, 1 000, ... .

• La transformarea unei unități de măsură mai mari într-una mai mică înmulțim cu 10, 100, 1 000, ... .

## 2. Unități de măsură pentru arie

Unitatea de măsură, internațional recunoscută, pentru arie este **metrul pătrat**, simbolizat **$m^2$**.

*Multiplii* și *submultiplii metrului pătrat* sunt:




**Atenție!**

• La transformarea unei unități de măsură mai mici într-una mai mare împărțim la $10^2$, $10^4$, $10^6$, ... .





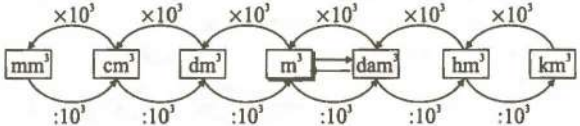
• La transformarea unei unități de măsură mai mari într-una mai mică înmulțim cu $10^2$, $10^4$, $10^6$, ... .

• Alte unități des folosite: arul (ar), 1 ar = 1 $dam^2$;
hectarul (ha), 1 ha = 1 $hm^2$.

## 3. Unități de măsură pentru volum

Unitatea de măsură, internațional recunoscută, pentru volum este **metrul cub**, simbolizat **$m^3$**.

*Multiplii* și *submultiplii metrului cub* sunt:




**Atenție!**

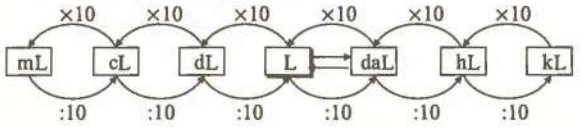
• La transformarea unei unități de măsură mai mici într-una mai mare împărțim la $10^3$, $10^6$, $10^9$, ... .

• La transformarea unei unități de măsură mai mari într-una mai mică înmulțim cu $10^3$, $10^6$, $10^9$, ... .

Uzual este folosit **litrul**, simbolizat L, ca unitate de măsură pentru volum.

**Relația de legătură** între cele două unități de măsură pentru volum este: **$1\ dm^3 = 1\ L$**.

*Multiplii* și *submultiplii litrului* sunt:



**Atenţie!**

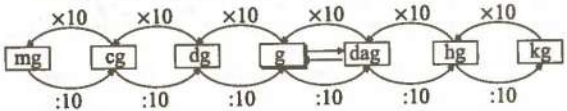
• La transformarea unei unităţi de măsură mai mici într-una mai mare împărţim la 10, 100, 1 000, ... .

• La transformarea unei unităţi de măsură mai mari într-una mai mică înmulţim cu 10, 100, 1 000, ... .

## 4. Unităţi de măsură pentru masă

Unitatea de măsură, internaţional recunoscută, pentru masă este **gramul**, simbolizat g.

*Multiplii* şi *submultiplii gramului* sunt:




**Atenţie!**

• Unităţile de măsură cresc/descresc din 10 în 10.

• Sunt des folosite: quintalul (q), 1 q = 100 kg;
tona (t), 1 t = 10 q = 1 000 kg.

## 5. Unităţi de măsură pentru timp

Unitatea de măsură, internaţional recunoscută, pentru timp este **secunda**, simbolizată s.

Alte unităţi des folosite: minutul (min), 1 min = 60 s:
ora (h), 1 h = 60 min;
ziua (d), 1 d = 24 h.



# Cuprins

**Prefaţă** ..... **3**

ALGEBRĂ

**I. Mulţimea numerelor naturale** ..... **5**
1. Operaţii cu numere naturale ..... 5
2. Compararea şi ordonarea numerelor naturale ..... 7
3. Factor comun ..... 7
4. Puterea unui număr natural ..... 8
5. Ordinea efectuării operaţiilor şi folosirea parantezelor ..... 9
6. Descompunerea numerelor naturale (în baza 10) ... 10
7. Divizibilitatea ..... 10

**II. Propoziţii şi mulţimi** ..... **13**
1. Propoziţii ..... 13
2. Mulţimi ..... 14

**III. Mulţimea numerelor întregi** ..... **16**
1. Noţiuni generale ..... 16
2. Operaţii cu numere întregi ..... 17

**IV. Mulţimea numerelor raţionale** ..... **19**
1. Noţiuni generale. Fracţii ..... 19
2. Amplificarea şi simplificarea fracţiilor ..... 20
3. Aducerea fracţiilor la acelaşi numitor ..... 20
4. Opusul unei fracţii ..... 21
5. Operaţii cu fracţii ..... 21
6. Fracţii ordinare şi fracţii zecimale ..... 23

**V. Mulţimea numerelor reale** ..... **25**
1. Noţiuni generale ..... 25
2. Radicali ..... 25
3. Intervale de numere reale ..... 26

4. Rapoarte, procente şi proporţii ..... 27
5. Medii ..... 30
6. Mărimi proporţionale ..... 31
7. Calcul algebric ..... 34
**VI. Ecuaţii ..... 37**
1. Ecuaţia de gradul întâi cu o necunoscută ..... 37
2. Ecuaţia de gradul al doilea cu o necunoscută ..... 37
**VII. Inecuaţia de gradul întâi cu o necunoscută ..... 39**
1. Noţiuni generale ..... 39
2. Rezolvarea inecuaţiilor ..... 39
**VIII. Ecuaţii şi sisteme de ecuaţii de gradul întâi cu două necunoscute ..... 40**
1. Ecuaţii de gradul întâi cu două necunoscute ..... 40
2. Sisteme de ecuaţii de gradul întâi cu două necunoscute ..... 40
**IX. Rezolvarea problemelor cu ajutorul ecuaţiilor ..... 44**
**X. Funcţii ..... 45**
1. Noţiuni generale ..... 45
2. Funcţia liniară ..... 45

## GEOMETRIE

**I. Unghiul ..... 51**
1. Noţiuni generale ..... 51
2. Clasificarea unghiurilor ..... 52
**II. Triunghiul ..... 56**
1. Noţiuni generale ..... 56
2. Construcţia triunghiurilor ..... 56
3. Clasificarea triunghiurilor ..... 58
4. Linii importante în triunghi ..... 59





5. Proprietăţi ale triunghiurilor ..... 61
6. Congruenţa şi asemănarea triunghiurilor ..... 65
7. Rezultate importante în asemănarea triunghiurilor ... 69
8. Teoreme importante în triunghiuri oarecare ..... 70
9. Teoreme importante în triunghiuri dreptunghice .. 73
10. Rapoarte constante în triunghiurile dreptunghice (elemente de trigonometrie) ..... 75
11. Valori particulare ale funcţiilor trigonometrice ..... 76
12. Formule pentru aria triunghiului ..... 76
**III. Patrulatere ..... 79**
1. Noţiuni generale ..... 79
2. Paralelogramul ..... 79
3. Trapezul ..... 83
4. Perimetrul şi aria patrulaterelor studiate ..... 84
**IV. Linia mijlocie în triunghi şi trapez ..... 86**
**V. Cercul ..... 88**
1. Noţiuni generale ..... 88
2. Poziţii relative ale unei drepte faţă de un cerc ..... 89
3. Poziţii relative a două cercuri ..... 90
4. Unghiuri construite relativ la cerc ..... 92
5. Teoreme referitoare la arce şi coarde ..... 95
6. Figuri geometrice înscrise în cerc ..... 96
7. Poligoane regulate ..... 98
8. Lungimi şi arii întâlnite în cerc ..... 99
**VI. Unghiul a două drepte în plan şi spaţiu ..... 101**
**VII. Perpendicularitate în plan şi spaţiu ..... 104**
1. Noţiuni generale ..... 104
2. Teoreme relative la perpendicularitate ..... 104

3. Proiecţii de puncte, segmente şi drepte ..... 105
4. Unghi diedru; unghi plan diedru ..... 108
5. Teorema celor trei perpendiculare ..... 109
**VIII. Prisma ..... 111**
1. Noţiuni generale ..... 111
2. Prisma dreaptă ..... 111
**IX. Piramida ..... 114**
1. Noţiuni generale ..... 114
2. Piramida regulată ..... 114
**X. Trunchiul de piramidă regulată ..... 117**
1. Aria şi volumul trunchiului de piramidă regulată ... 117
2. Cazuri particulare de trunchiuri ..... 118
**XI. Ariile şi volumele corpurilor rotunde ..... 120**
1. Cilindrul circular drept ..... 120
2. Conul circular drept ..... 120
3. Trunchiul de con circular drept ..... 121
4. Sfera ..... 121
**XII. Unităţi de măsură ..... 122**
1. Unităţi de măsură pentru lungime ..... 122
2. Unităţi de măsură pentru arie ..... 122
3. Unităţi de măsură pentru volum ..... 123
4. Unităţi de măsură pentru masă ..... 124
5. Unităţi de măsură pentru timp ..... 124

920927

BIBLIOTECA JUDEŢEANĂ
GH. ŞINCAI
• BIHOR •